

Библиотека инженера – гидроакустика



**ПЬЕЗО -  
КЕРАМИЧЕСКИЕ  
ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ**

**СПРАВОЧНИК**

# ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ  
И РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ

---

СПРАВОЧНИК

Под редакцией  
С. И. ПУГАЧЕВА



Ленинград  
„Судостроение“ 1984

ББК 32.875

П 11

УДК 539.1.078 : 629.12(031)

**СЕРИЯ «БИБЛИОТЕКА ИНЖЕНЕРА-ГИДРОАКУСТИКА»**

*Редакционная коллегия:* Е. А. Васильцов, А. П. Евтютов, А. Е. Колесников, Е. А. Корепин, В. Ф. Мартынюк, А. П. Ляликов, В. И. Бабий, В. В. Ольшевский, Л. В. Орлов, А. Л. Простаков, В. А. Сапрыкин, Г. М. Свердлин, А. Д. Старков, Ю. Ф. Тарасюк (ответственный редактор), В. И. Тимошенко.

*Рецензенты:* д-р техн. наук А. Е. Колесников,  
канд. техн. наук Ю. Ф. Тарасюк

*Научный редактор* — канд. техн. наук С. И. Пугачев

**П 11 Пьезокерамические преобразователи: Справочник/**  
В. В. Ганопольский, Б. А. Касаткин, Ф. Ф. Легуша,  
Н. И. Прудько, С. И. Пугачев.—Л.: Судостроение,  
1984.—256 с., ил.—(Библиотека инженера-гидроаку-  
стика).

ИСБН

Изложены сведения о методах и средствах измерения констант пьезоке-  
рамки и параметров пьезорезонатора. Приведены методы расчета пьезоке-  
рамических преобразователей типа стержней, пластин, цилиндров, а также пре-  
образователей произвольных размеров. Рассмотрены методы и устройства  
визуализации ультразвуковых и тепловых полей преобразователей.

Книга рассчитана на специалистов, занимающихся проектированием, изго-  
товлением и эксплуатацией пьезокерамических преобразователей. Она также  
может быть полезна студентам и преподавателям соответствующих специаль-  
ностей высших учебных заведений.

П  $\frac{3605030000-077}{048(01)-84}$  44-84

32.875

**СЕРИЯ «БИБЛИОТЕКА ИНЖЕНЕРА-ГИДРОАКУСТИКА»**

**Вячеслав Викторович Ганопольский, Борис Анатольевич Касаткин,  
Федор Федорович Легуша, Николай Иванович Прудько,  
Сергей Иванович Пугачев**

**ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ. СПРАВОЧНИК**

Редактор Э. В. Зубкова. Технический редактор И. К. Пелипенко.  
Корректоры С. Н. Маковская, И. М. Меримская, В. Ю. Самохина.  
Художественный редактор О. П. Андреев. Художник Б. Н. Осенчаков.  
ИБ № 917

Сдано в набор 12.06.84. Подписано в печать 07.12.84. М-34935. Формат 60×90<sup>1/16</sup>. Бумага  
для глубокой печати. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 16,0. Усл.  
кр.-отт. 16,38. Уч.-изд. л. 15,9. Тираж 3150 экз. Изд. № 3795-82. Заказ № 196. Цена 85 коп.  
Издательство «Судостроение». 191065, Ленинград, ул. Гоголя, 8.

Ленинградская типография № 2 голавное предприятие ордена Трудового Красного Зна-  
мени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзпо-  
лиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательства, полиграфии  
и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Л1-52, Измайловский проспект, 29.

Издательство «Судостроение», 1984 г.

Цель настоящей книги — дать справочные данные по двум взаимосвязанным проблемам — методам измерения параметров пьезокерамических материалов и резонаторов, а также методам расчета и проектирования пьезопреобразователей. Причем в последнем случае основу составляют нетрадиционные методы и режимы работы пьезопреобразователей произвольных размеров.

В первой главе приведены общие сведения о пьезокерамических материалах в традиционном описании. Для наиболее употребительных в акустике отечественных составов пьезокерамики даны справочные данные, составленные на основе современной научно-технической литературы.

Во второй главе приведены общие сведения о наиболее употребимых типах пьезокерамических элементов простейшей геометрии, даны описания их работы и эквивалентные схемы. Такие пьезоэлементы простейшей геометрии используются далее при измерениях полного набора упругих, диэлектрических и пьезоэлектрических постоянных материала или для построения пьезопреобразователей. Здесь же приведена классификация одномерных мод колебаний пьезоэлементов, предварительное знакомство с которой необходимо при чтении гл. 3.

В третьей главе описаны методы измерений констант пьезокерамических материалов и параметров пьезокерамических резонаторов, а в четвертой — аппаратура для определения полного набора этих параметров. Оригинальными являются вопросы измерения параметров пьезоматериалов с учетом внутренних потерь.

В пятой главе приведены необходимые сведения из одномерных теорий пьезопреобразователей типа стержней, пластин, цилиндров. Алгоритм расчета обобщается на пьезопреобразователи произвольной



структуры, содержащие в своем составе произвольный набор согласующих слоев — пассивных либо пьезоактивных.

В шестой главе в сравнительном плане рассмотрены наиболее важные и эффективные методы построения широкополосных преобразователей как наиболее универсальных в практических приложениях гидроакустики.

В седьмой главе рассмотрены преобразователи с управляемыми параметрами и характеристиками, функциональные возможности которых весьма разнообразны. Описаны конструкции, объединяющие в себе функционально различные типы преобразователей.

В восьмой главе приведены результаты анализа работы пьезопреобразователей произвольных размеров в окрестности основной резонансной частоты. Предложена инженерная методика расчета основной резонансной частоты пьезокерамических преобразователей типа стержней, пластин, цилиндров произвольных размеров. Представлен метод, позволяющий произвести полный расчет пьезокерамического преобразователя произвольных размеров, работающего в окрестности основной резонансной частоты.

В девятой главе рассмотрены методы и устройства визуализации ультразвуковых и тепловых полей пьезопреобразователей.

В работе над справочником приняли участие: В. В. Ганопольский (гл. 4), Б. А. Касаткин (гл. 5—8), Ф. Ф. Легуша (гл. 9), Н. И. Прудько (§ 1.4, гл. 2—3), С. И. Пугачев (гл. 1, § 2.3).

Все критические замечания и пожелания просим направлять по адресу: 191065, Ленинград, ул. Гоголя, 8, издательство «Судостроение».

**ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ**

**§ 1.1. Уравнения состояния пьезоэлектрической среды. Определение констант пьезоэлектрика**

Уравнения состояния пьезоэлектрической среды (уравнения пьезоэффекта) выводятся из выражений для термодинамических потенциалов, которые представляются в виде разложения в степенные ряды по соответствующим независимым переменным, определяющим внешнее механическое, электрическое, магнитное или тепловое воздействия [117].

Уравнения пьезоэффекта обычно записывают в матричной форме. (Соответствие этой формы другим формам и обозначение

Таблица 1.1. Обозначения электрических и упругих переменных

Форма записи	Электрические переменные						Упругие переменные											
	E			D			Механическое напряжение						Механическая деформация					
							Нормальные компоненты			Сдвиговые компоненты			Нормальные компоненты			Сдвиговые компоненты		
Тензорная	$E_x$	$E_y$	$E_z$	$D_x$	$D_y$	$D_z$	$\sigma_{xx}$	$\sigma_{yy}$	$\sigma_{zz}$	$\tau_{yz}$	$\tau_{zx}$	$\tau_{xy}$	$\epsilon_{xx}$	$\epsilon_{yy}$	$\epsilon_{zz}$	$V_{yz}$	$V_{zx}$	$V_{xy}$
	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$D_1$	$D_2$	$D_3$	$T_{11}$	$T_{22}$	$T_{33}$	$T_{23}$	$T_{13}$	$T_{12}$	$S_{11}$	$S_{22}$	$S_{33}$	$2S_{23}$	$2S_{13}$	$2S_{12}$
Матричная							$X_x$	$Y_y$	$Z_z$	$Y_z$	$Z_x$	$X_y$	$x_x$	$y_y$	$z_z$	$y_z$	$z_x$	$x_y$
	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$D_1$	$D_2$	$D_3$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
							$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_4$	$\sigma_5$	$\sigma_6$	$U_1$	$U_2$	$U_3$	$U_4$	$U_5$	$U_6$
							$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_5$	$T_6$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$

ниям приведено в табл. 1.1.)

$$\left. \begin{aligned} S_i &= s_{ij}^{E\theta} T_j + d_{mi}^{\theta} E_m + \alpha_i^E d\theta; \\ D_m &= d_{mi}^{\theta} T_i + e_{mk}^{T\theta} E_k + p_m^T d\theta; \\ d\sigma &= \alpha_i^E T_i + p_m^T E_m + \frac{\rho c^{E,T}}{\theta} d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

В уравнениях (1.1)  $T_{i,j}$  — составляющие механического напряжения;  $S_i$  — деформации ( $i, j = 1 \div 6$ );  $E_m, D_m$  — напряженность электрического поля и индукция ( $m = 1 \div 3$ );  $\sigma$  — энтропия;  $\theta$  — абсолютная температура;  $\rho$  — плотность;  $c^{E,T}$  — теплоемкость пьезоэлектрика;  $s_{ij}, e_{mk}, d_{mi}$  — упругие, диэлектрические, пьезоэлектрические константы соответственно;  $p_m^T$  — пьезоэлектрическая константа;  $\alpha_i$  — коэффициент теплового расширения.

Для изотермических условий ( $d\theta = 0$ ) уравнения пьезоэффекта приобретают вид

$$\left. \begin{aligned} S_i &= s_{ij}^E T_j + d_{mi} E_m; \\ D_m &= d_{mi} T_i + e_{mk}^T E_k. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Уравнения пьезоэффекта для адиабатических условий отличаются от уравнений (1.2) использованием адиабатических констант  $s_{ij}^E, \sigma, e_{mk}^T, \sigma, d_{mi}^{\sigma}$  вместо изотермических  $s_{ij}^{E,\theta}, e_{mk}^{T,\theta}, d_{mi}^{\theta}$ .

В зависимости от выбора независимых переменных уравнения пьезоэффекта имеют четыре различных формы записи (табл. 1.2). В таблице также даны примеры применения уравнений в задачах об одномерных колебаниях пьезоэлементов (см. гл. 2). Из уравнений пьезоэффекта [117] следуют определения упругих, диэлектрических и пьезоэлектрических констант пьезоэлектрических материалов (табл. 1.3).

Сопоставляя уравнения пьезоэффекта, можно получить соотношения между упругими, диэлектрическими и пьезоэлектрическими константами (табл. 1.4).

Уравнения пьезоэффекта, приведенные в табл. 1.2, справедливы в рамках линейной теории, т. е. при относительно слабых внешних воздействиях. При воздействии на пьезоэлектрик больших механических напряжений или сильных электрических полей уравнения пьезоэффекта становятся нелинейными. В таком случае используют уравнения, приведенные в табл. 1.2, как квазилинейные, полагая константы материала зависящими от уровня электрических и механических внешних воздействий. Кроме того, в уравнениях пьезоэффекта необходимо учитывать возможность появления в материале необратимых изменений, например упругого, электрического и пьезоэлектрического гистерезисов.

Уравнения пьезоэффекта могут быть непосредственно применимы к любому объему пьезоэлектрического материала лишь в статических условиях, т. е. когда входящие в них переменные не зависят от координат. В этом случае выполняются также изотермические условия [114].

Т а б л и ц а 1.2. Уравнения пьезоэффекта

№ уравнения	Уравнения пьезоэффекта		Независимые переменные	Применения уравнений пьезоэффекта в задачах об одномерных колебаниях пьезоэлементов и преобразователей
	прямого	обратного		
(1)	$D = dT + e^T E$	$S = s^E T + d_t E$	$T$ $E$	<p><i>Низкочастотные пьезомягкие моды</i></p> <p>Колебания пьезокерамических колец с аксиальной поляризацией</p> <p>Сферически симметричные колебания тонкой сферической пьезокерамической оболочки</p> <p>Продольные колебания стержня в поле, перпендикулярном его длине</p> <p>Диски с радиальными колебаниями</p> <p><i>Высокочастотные пьезомягкие моды</i></p>
(2)	$D = eS + e^S E$	$T = c^E S - e_t E$	$S$ $E$	<p>Толщинные колебания пластин в электрическом поле, перпендикулярном толщине</p> <p><i>Низкочастотные пьезожесткие моды</i></p>
(3)	$E = -gT + \beta^T D$	$S = s^D T + g_t D$	$T$ $D$	<p>Продольные колебания стержня в поле параллельном его длине</p> <p><i>Высокочастотные пьезожесткие моды</i></p>
(4)	$E = -hS + \beta^S D$	$T = c^D S - h_t D$	$S$ $D$	<p>Тонкая пластинка с продольными колебаниями по толщине</p> <p>Пластинка со сдвиговыми колебаниями по толщине</p>

Примечание. Индекс  $t$  в уравнениях пьезоэффекта обозначает транспонированную матрицу, т. е. такую матрицу, в которой столбцы и строки поменялись местами:

Таблица 1.3. Определение констант

Упругие константы		Диэлектрические
Наименование	Определение	Наименование
Упругая податливость «короткозамкнутого» пьезоэлектрика ( $E = 0$ ) или упругая податливость при $E = \text{const}$	$s_{ij}^E = \left( \frac{\partial S_i}{\partial T_j} \right)_E$	Диэлектрическая проницаемость «свободного» пьезоэлектрика ( $T = 0$ ) или диэлектрическая проницаемость при $T = \text{const}$ .
Упругая жесткость (постоянная упругости) «короткозамкнутого» пьезоэлектрика ( $E = 0$ ) или упругая жесткость (постоянная упругости) при $E = \text{const}$	$c_{ij}^E = \left( \frac{\partial T_i}{\partial S_j} \right)_E$	Диэлектрическая проницаемость «зажатого» пьезоэлектрика или диэлектрическая проницаемость при $S = \text{const}$
Упругая податливость «холостого хода» ( $D = 0$ ) или упругая податливость при $D = \text{const}$	$s_{ij}^D = \left( \frac{\partial S_i}{\partial T_j} \right)_D$	Диэлектрическая непроницаемость «свободного» пьезоэлектрика ( $T = 0$ ) или диэлектрическая непроницаемость при $T = \text{const}$
Упругая жесткость (постоянная упругости) «холостого хода» ( $D = 0$ ) или упругая жесткость (постоянная упругости) при $D = \text{const}$	$c_{ij}^D = \left( \frac{\partial T_i}{\partial S_j} \right)_D$	Диэлектрическая непроницаемость «зажатого» пьезоэлектрика ( $S = 0$ ) или диэлектрическая непроницаемость при $S = \text{const}$

Примечания. 1. В последнем столбце указаны номера уравнений строки настоящей таблицы. 2.  $d$  — пьезоэлектрический модуль, определенности электрического поля;  $e$  — пьезоконстанта, определяющая механического поля;  $g$  — пьезоконстанта давления, характеризующая на данном механическом напряжении;  $h$  — пьезоконстанта деформации, заданной деформации.

Таблица 1.4. Соотношения между

Упругие константы	Диэлектрические константы
$s_{ij}^E - s_{ij}^D = g_{im} d_{mj} = d_{im} g_{mj}$	
$c_{ij}^D - c_{ij}^E = h_{im} e_{mj} = e_{im} h_{mj}$	
	$e_{mk}^T - e_{mk}^S = d_{im} e_{ki} = e_{im} d_{ki}$
	$\beta_{mk}^S - \beta_{mk}^T = h_{im} g_{ki} = g_{im} h_{ki}$

Примечания. 1.  $m, k = 1 \div 3$ ;  $i, j = 1 \div 6$ . Подразумевается суммирует номера уравнений пьезоэффекта из табл. 1.2, совместное реше-

пьезоэлектрических материалов

константы		Пьезоэлектрические константы		Уравнения пьезоэффекта из табл. 1.2
Определение	Наименование	Определение		
$\epsilon_{mk}^T = \left( \frac{\partial D_m}{\partial E_k} \right)_T$	Пьезоэлектрический модуль	$d_{mi} = \left( \frac{\partial D_m}{\partial T_i} \right)_E = \left( \frac{\partial S_i}{\partial E_m} \right)_T$	(1)	
$\epsilon_{mk}^S = \left( \frac{\partial D_m}{\partial E_k} \right)_S$	Пьезоконстанта	$e_{mi} = \left( \frac{-\partial T_i}{\partial E_m} \right)_S = \left( \frac{\partial D_m}{\partial S_i} \right)_E$	(2)	
$\beta_{mk}^T = \left( \frac{\partial E_k}{\partial D_m} \right)_T$	Пьезоконстанта давления	$g_{mi} = \left( \frac{-\partial E_m}{\partial T_i} \right)_D = \left( \frac{\partial S_i}{\partial D_m} \right)_T$	(3)	
$\beta_{mk}^S = \left( \frac{\partial E_k}{\partial D_m} \right)_S$	Пьезоконстанта деформации	$h_{mi} = \left( \frac{-\partial E_m}{\partial S_i} \right)_D = \left( \frac{-\partial T_i}{\partial D_m} \right)_S$	(4)	

пьезоэффекта из табл. 1.2, которые определяют константы соответствующий деформации в свободном пьезоэлементе при заданной напряческой напряженности в зажатом пьезоэлементе при заданной напряженности напряженности электрического поля холостого хода в пьезоэлементе при характеризующая напряженности электрического поля холостого хода при

константами пьезоэлектрических материалов

Пьезоэлектрические константы	Уравнения пьезоэффекта из табл. 1.2
$d_{mi} = e_{km}^T g_{kl}; g_{mi} = \beta_{km}^T d_{kl}$	(1)–(3)
$e_{mi} = e_{km}^S h_{kl}; h_{mi} = \beta_{km}^S e_{kl}$	(2)–(4)
$d_{mi} = e_{nj}^E s_{ji}^E; e_{mi} = d_{mj}^E c_{jt}^E$	(1)–(2)
$g_{mi} = h_{mj}^D s_{jt}^D; h_{mi} = g_{mj}^D c_{jt}^D$	(3)–(4)

мирование по повторяющимся индексам. 2. Последний столбец таблицы ние которых позволяет получить приводимые здесь соотношения.

В динамическом режиме, когда в пьезоэлектрике возбуждаются упругие волны, а деформация, индукция и другие переменные величины зависят от координат, уравнения пьезоэффекта можно считать справедливыми для элементарных объемов, внутри которых  $S_i$ ,  $T_j$ ,  $D_m$ ,  $E_k$  приближенно рассматриваются как однородные величины. В этом случае уравнения, приведенные в табл. 1.2, называют *местными уравнениями пьезоэффекта*. Константы материала, входящие в эти уравнения, соответствуют адиабатическим условиям. Местные уравнения находят широкое применение при описании и определении параметров и констант пьезокерамических материалов и преобразователей на их основе.

## § 1.2. Матрица упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических констант для пьезокерамики и основные соотношения между константами

Пьезоэлектрическая керамика изготавливается в основном из сегнетоэлектриков, принадлежащих к трем классам симметрии: тетрагональному классу  $4mm$ , ромбоэдрическому  $3m$  и ромбическому  $2mm$  [123]. Однако независимо от симметрии образующих ее кристаллитов поляризованная пьезокерамика всегда имеет матрицу компонент тензоров упругих, диэлектрических и пьезоэлектрических коэффициентов одного и того же вида.

Пьезоэлектрические уравнения в общем виде могут быть представлены системой

$$\left. \begin{aligned}
 S_1 &= s_{11}^E T_1 + s_{12}^E T_2 + s_{13}^E T_3 + s_{14}^E T_4 + s_{15}^E T_5 + s_{16}^E T_6 + d_{11} E_1 + \\
 &\quad + d_{21} E_2 + d_{31} E_3; \\
 S_2 &= s_{12}^E T_1 + s_{22}^E T_2 + s_{23}^E T_3 + s_{24}^E T_4 + s_{25}^E T_5 + s_{26}^E T_6 + d_{12} E_1 + \\
 &\quad + d_{22} E_2 + d_{32} E_3; \\
 S_3 &= s_{13}^E T_1 + s_{23}^E T_2 + s_{33}^E T_3 + s_{34}^E T_4 + s_{35}^E T_5 + s_{36}^E T_6 + d_{13} E_1 + \\
 &\quad + d_{23} E_2 + d_{33} E_3; \\
 S_4 &= s_{14}^E T_1 + s_{24}^E T_2 + s_{34}^E T_3 + s_{44}^E T_4 + s_{45}^E T_5 + s_{46}^E T_6 + d_{14} E_1 + \\
 &\quad + d_{24} E_2 + d_{34} E_3; \\
 S_5 &= s_{15}^E T_1 + s_{25}^E T_2 + s_{35}^E T_3 + s_{45}^E T_4 + s_{55}^E T_5 + s_{56}^E T_6 + d_{15} E_1 + \\
 &\quad + d_{25} E_2 + d_{35} E_3; \\
 S_6 &= s_{16}^E T_1 + s_{26}^E T_2 + s_{36}^E T_3 + s_{46}^E T_4 + s_{56}^E T_5 + s_{66}^E T_6 + d_{16} E_1 + \\
 &\quad + d_{26} E_2 + d_{36} E_3; \\
 D_1 &= d_{11} T_1 + d_{12} T_2 + d_{13} T_3 + d_{14} T_4 + d_{15} T_5 + d_{16} T_6 + \\
 &\quad + e_{11}^T E_1 + e_{12}^T E_2 + e_{13}^T E_3; \\
 D_2 &= d_{21} T_1 + d_{22} T_2 + d_{23} T_3 + d_{24} T_4 + d_{25} T_5 + d_{26} T_6 + \\
 &\quad + e_{12}^T E_1 + e_{22}^T E_2 + e_{23}^T E_3; \\
 D_3 &= d_{31} T_1 + d_{32} T_2 + d_{33} T_3 + d_{34} T_4 + d_{35} T_5 + d_{36} T_6 + \\
 &\quad + e_{13}^T E_1 + e_{23}^T E_2 + e_{33}^T E_3.
 \end{aligned} \right\} (1.3)$$

Коэффициенты в уравнениях состояния (1.3) можно представить в виде упругопьезодиэлектрических матриц, содержащих  $9 \times 9$  компонент. В такой матрице каждый столбец будет соответствовать одной из независимых (механической или электрической) переменных, в данном случае компонентам механического напряжения и напряженности электрического поля; каждая строка — одной из независимых переменных; в уравнениях (1.3) — компонентам механической деформации и электрической индукции [136].

Симметрия сегнетоэлектрической пьезокерамики  $\infty mm$  приводит к упругопьезодиэлектрической матрице, представленной в табл. 1.5. Такая матрица получена в результате выбора в качестве кристаллографической оси  $Z$  (индекс 3) — полярной оси симметрии бесконечного порядка (оси поляризации пьезокерамики). В качестве осей  $X$  и  $Y$  (индексы 1 и 2) выбираются две произвольные ортогональные оси в плоскости, перпендикулярной оси поляризации.

Т а б л и ц а 1.5. Упругопьезодиэлектрическая матрица пьезокерамики

$s_{11}$	$s_{12}$	$s_{13}$	0	0	0	0	0	$d_{31}$
$s_{12}$	$s_{11}$	$s_{13}$	0	0	0	0	0	$d_{31}$
$s_{13}$	$s_{13}$	$s_{33}$	0	0	0	0	0	$d_{33}$
0	0	0	$s_{44}$	0	0	0	0	$d_{15}$
0	0	0	0	$s_{44}$	0	0	$d_{15}$	0
0	0	0	0	0	$2(s_{11} - s_{12})$	0	0	0
0	0	0	0	$d_{15}$	0	0	$\epsilon_{11}$	0
0	0	0	$d_{15}$	0	0	0	0	$\epsilon_{11}$
$d_{31}$	$d_{31}$	$d_{33}$	0	0	0	0	0	$\epsilon_{33}$

Изотропия поляризованной пьезокерамики в плоскости, перпендикулярной к полярной оси, обуславливает равенство:

1) упругих констант  $s_{13} = s_{23}$ . Равенство означает, что напряжения в направлениях  $X$  и  $Y$  вызывают одинаковую деформацию в направлении полярной оси, а также  $s_{11} = s_{22}$ ;  $s_{44} = s_{55}$ ;  $s_{66} = 2(s_{11} - s_{12})$ ;

2) пьезоэлектрических констант  $d_{31} = d_{32}$ . Равенство означает, что электрическое поле, параллельное полярной оси, вызывает одинаковую продольную деформацию в направлениях  $X$  и  $Y$ , а также  $d_{24} = d_{15}$ , означающее, что электрическое поле, направленное вдоль осей  $Y$  и  $X$ , вызывает эквивалентный сдвиг в плоскостях  $YZ$  и  $XZ$ ;

3) диэлектрических констант  $\epsilon_{11} = \epsilon_{22}$ .

Таким образом, пьезоэлектрическая керамика характеризуется набором десяти независимых констант, включающих пять упругих констант:  $s_{11}$ ,  $s_{12}$ ,  $s_{13}$ ,  $s_{33}$ ,  $s_{44}$ ; три пьезоэлектрические константы:  $d_{31}$ ,  $d_{33}$ ,  $d_{15}$ ; две диэлектрические константы:  $\epsilon_{11}$ ,  $\epsilon_{33}$ .



Уравнения (1.3) принимают для пьезокерамики следующий вид:

$$\left. \begin{aligned}
 S_1 &= s_{11}^E T_1 + s_{12}^E T_2 + s_{13}^E T_3 + d_{31} E_3; \\
 S_2 &= s_{12}^E T_1 + s_{11}^E T_2 + s_{13}^E T_3 + d_{31} E_3; \\
 S_3 &= s_{13}^E (T_1 + T_2) + s_{33}^E T_3 + d_{33} E_3; \\
 S_4 &= s_{44}^E T_4 + d_{15} E_2; \\
 S_5 &= s_{44}^E T_5 + d_{15} E_1; \\
 S_6 &= s_{66}^E T_6; \\
 D_1 &= d_{15} T_5 + \epsilon_{11}^T E_1; \\
 D_2 &= d_{15} T_4 + \epsilon_{11}^T E_2; \\
 D_3 &= d_{31} (T_1 + T_2) + d_{33} T_3 + \epsilon_{33}^T E_3.
 \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Возможные типы деформации для пьезокерамики такие же, как для изотропного твердого тела, с учетом соответствующих упругих коэффициентов. Появление того или иного типа деформаций определяется отличными от нуля упругими постоянными упругой части матрицы, приведенной в табл. 1.5.

Характер упругих коэффициентов упругой матрицы представлен на рис. 1.1 [63]. Здесь показаны типы деформаций, производимых через соответствующие упругие коэффициенты компонентами напряжения:  $L$  — продольные деформации растяжения, параллельные растягивающим напряжениям;  $T$  — поперечные деформации растяжения, перпендикулярные растягивающим напряжениям;  $L'$  — деформации растяжения, параллельные оси сдвига, вызванные напряжением сдвига;  $T'$  — деформации растяжения, которые находятся в плоскости напряжения сдвига, вызывающего данную деформацию;  $S$  — деформации сдвига в плоскостях, параллельных напряжениям сдвига;  $S'$  — деформации сдвига в плоскостях, перпендикулярных напряжениям сдвига.

Используя упругопьезодиэлектрическую матрицу для пьезокерамики, можно конкретизировать соотношения между константами пьезокерамики, приведенными в табл. 1.4 (табл. 1.6—1.8).

Компоненты тензоров упругой податливости  $s_{ij}$  и упругой жесткости  $c_{ij}$ , а также диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{mk}$  и диэлектрической непроницаемости  $\beta_{mk}$  связаны соотношениями

$$c_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \Delta_{ij}}{\Delta}; \quad \beta_{mk} = \frac{(-1)^{m+k} \Delta_{mk}}{\Delta}, \quad (1.5)$$

где  $\Delta$  — определители матриц  $s_{ij}$  и  $\epsilon_{mk}$ ;  $\Delta_{ij}$ ,  $\Delta_{mk}$  — алгебраические дополнения, получающиеся в результате вычеркивания  $i$ -й ( $m$ -й) строки и  $j$ -го ( $k$ -го) столбца.

Использование выражений (1.5) для пьезокерамики приводит к соотношениям между  $s_{ij}$  и  $c_{ij}$ ,  $\epsilon_{mk}$  и  $\beta_{mk}$ , показанным в табл. 1.9.

	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_5$	$T_6$
$s_1$	$L$	$T$	$T$	$L'$	$T'$	$T'$
$s_2$	$T$	$L$	$T$	$T'$	$L'$	$T'$
$s_3$	$T$	$T$	$L$	$T'$	$T'$	$L'$
$s_4$	$L'$	$T'$	$T'$	$s$	$s'$	$s'$
$s_5$	$T'$	$L'$	$T'$	$s'$	$s$	$s'$
$s_6$	$T'$	$T'$	$L'$	$s'$	$s'$	$s$

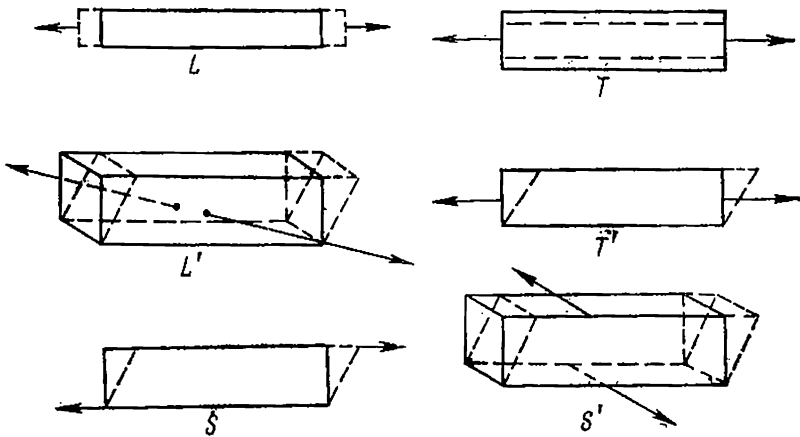


Рис. 1.1. Зависимости напряжение — деформация для упругих коэффициентов различных типов.

—→ — силы; — — — — деформации.

Применяя соотношения между упругими, диэлектрическими и пьезоэлектрическими константами пьезокерамики, приведем примеры расчетных схем, позволяющих по ограниченному набору констант определить все компоненты упругопьезодиэлектрической матрицы пьезокерамики.

На рис. 1.2, построенных по данным работ [137, 152], приведены варианты расчетных схем для определения компонент тензора упругой константы. Расчетную схему можно представить из этапов I ÷ II — I (см. рис. 1.2) и I ÷ V (см. рис. 1.3).

Таблица 1.6. Соотношения между упругими константами для пьезокерамики

Упругие константы	Определение	
	через пьезоконстанты	через пьезо- и диэлектрические константы
$s_{11}^E - s_{11}^D = s_{12}^E - s_{12}^D$	$d_{31}g_{31}$	$g_{31}^2 \epsilon_{33}^T = d_{31}^2 \beta_{33}^T$
$s_{13}^E - s_{13}^D$	$d_{31}g_{33} = d_{33}g_{31}$	$g_{31}g_{33} \epsilon_{33}^T = d_{31}d_{33}\beta_{33}^T$
$s_{33}^E - s_{33}^D$	$d_{33}g_{33}$	$g_{33}^2 \epsilon_{33}^T = d_{33}^2 \beta_{33}^T$
$s_{44}^E - s_{44}^D$	$d_{15}g_{15}$	$g_{15}^2 \epsilon_{11}^T = d_{15}^2 \beta_{11}^T$
$s_{66}^E = s_{66}^D$	—	—
$c_{11}^D - c_{11}^E = c_{12}^D - c_{12}^E$	$h_{31}e_{31}$	$h_{31}^2 e_{33}^S = e_{31}^2 \beta_{33}^S$
$c_{13}^D - c_{13}^E$	$h_{31}e_{33} = h_{33}e_{31}$	$e_{31}e_{33}\beta_{33}^S$
$c_{33}^D - c_{33}^E$	$h_{33}e_{33}$	$h_{33}^2 e_{33}^S = e_{33}^2 \beta_{33}^S$
$c_{44}^D - c_{44}^E$	$h_{15}e_{15}$	$h_{15}^2 e_{11}^S = e_{15}^2 \beta_{11}^S$
$c_{66}^D = c_{66}^E$	—	—

Примечание. Выражения, стоящие в каждой строке настоящей таблицы, составляют равенства: например,  $s_{11}^E - s_{11}^D = s_{12}^E - s_{12}^D = d_{31}g_{31} = g_{31}^2 \epsilon_{33}^T = d_{31}^2 \beta_{33}^T$  и т. д.

Таблица 1.7. Соотношения между диэлектрическими константами для пьезокерамики

Диэлектрические константы	Определение	
	через пьезоконстанты	через пьезо- и упругие константы
$\epsilon_{11}^T - \epsilon_{11}^S$	$d_{15}e_{15}$	$d_{15}^2 c_{44}^E = e_{15}^2 s_{44}^E$
$\epsilon_{33}^T - \epsilon_{33}^S$	$2d_{31}e_{31} + d_{33}e_{33}$	$2d_{31}^2 (c_{11}^E + c_{12}^E) + d_{33}^2 c_{33}^E + 4d_{31}d_{33}c_{13}^E$
$\beta_{11}^T - \beta_{11}^S$	$h_{15}g_{15}$	$h_{15}^2 s_{44}^D = g_{15}^2 c_{44}^D$
$\beta_{33}^S - \beta_{33}^T$	$2h_{31}g_{31} + h_{33}g_{33}$	$2h_{31}^2 (s_{11}^D + s_{12}^D) + h_{33}^2 s_{33}^D + 4h_{33}h_{31}s_{13}^D$

Примечание. Выражения, стоящие в каждой строке настоящей таблицы, составляют равенства: например,  $\epsilon_{11}^T - \epsilon_{11}^S = d_{15}e_{15} = d_{15}^2 c_{44}^E = e_{15}^2 s_{44}^E$  и т. д.

Таблица 1.8. Соотношения между пьезоэлектрическими константами для пьезокерамики

Пьезоэлектрические константы		Определение	
		через пьезо- и пьезоэлектрические константы	через пьезо- и упругие константы
<i>d</i>	$d_{31}$	$e_{33}^T g_{31}$	$e_{31} (s_{11}^E + s_{12}^E) + e_{33} s_{13}^E$
	$d_{33}$	$e_{33}^T g_{33}$	$2e_{31} s_{13}^E + e_{33} s_{33}^E$
	$d_{15}$	$e_{11}^T g_{15}$	$e_{15} s_{44}^E$
<i>e</i>	$e_{31}$	$e_{33}^S h_{31}$	$d_{31} (c_{11}^E + c_{12}^E) + d_{33} c_{13}^E$
	$e_{33}$	$e_{33}^S h_{33}$	$2d_{31} c_{13}^E + d_{33} c_{33}^E$
	$e_{15}$	$e_{11}^S h_{15}$	$d_{15} c_{44}^E$
<i>g</i>	$g_{31}$	$\beta_{33}^T d_{31}$	$h_{31} (s_{11}^D + s_{12}^D) + h_{33} s_{13}^D$
	$g_{33}$	$\beta_{33}^T d_{33}$	$2h_{31} s_{13}^D + h_{33} s_{33}^D$
	$g_{15}$	$\beta_{11}^T d_{15}$	$h_{15} s_{44}^D$
<i>h</i>	$h_{31}$	$\beta_{33}^S e_{31}$	$g_{31} (c_{11}^D + c_{12}^D) + g_{33} c_{13}^D$
	$h_{33}$	$\beta_{33}^S e_{33}$	$2g_{31} c_{13}^D + g_{33} c_{33}^D$
	$h_{15}$	$\beta_{11}^S e_{15}$	$g_{15} c_{44}^D$

Примечание. Выражения, стоящие в каждой строке настоящей таблицы, составляют равенства: например,  $d_{31} = e_{33}^T g_{31} = e_{31} \times (s_{11}^E + s_{12}^E) + e_{33} s_{13}^E$  и т. д.

Таблица 1.9. Соотношения между компонентами тензоров упругих и диэлектрических констант для пьезокерамики

Компоненты тензора упругой жесткости	Выражение через компоненты тензора упругой податливости	Критерии совместимости
$c_{11}$	$c_{11} = \frac{s_{11}s_{33} - s_{13}^2}{(s_{11} - s_{12}) [s_{33}(s_{11} + s_{12}) - 2s_{13}^2]}$	$\frac{c_{11} - c_{12}}{c_{33}} = \frac{s_{33}}{s_{11} - s_{12}}$
$c_{12}$	$c_{12} = \frac{-s_{12}s_{33} - s_{13}^2}{(s_{11} - s_{12}) [s_{33}(s_{11} + s_{12}) - 2s_{13}^2]}$	
$c_{13}$	$c_{13} = \frac{-s_{13}}{s_{33}(s_{11} + s_{12}) - 2s_{13}^2}$	$\frac{c_{13}}{c_{33}} = \frac{s_{13}}{s_{11} + s_{12}}$
$c_{33}$	$c_{33} = \frac{s_{11} + s_{12}}{s_{33}(s_{11} + s_{12}) - 2s_{13}^2}$	
$c_{44}$	$c_{44} = \frac{1}{s_{44}}$	
Компоненты тензора диэлектрической проницаемости	Выражение через компоненты тензора диэлектрической непроницаемости	—
$\epsilon_{11}$	$\epsilon_{11} = \frac{1}{\beta_{11}}$	—
$\epsilon_{33}$	$\epsilon_{33} = \frac{1}{\beta_{33}}$	—

Примечание. Критерии совместимости могут быть использованы для проверки точности определения компонент тензоров  $c_{ij}$  и  $s_{ij}$ .

В расчетной схеме 1 (см. рис. 1.2) и на этапах I и II — 1 используются соотношения между упругими константами при  $E = \text{const}$  и  $D = \text{const}$ , приведенные в табл. 1.6; на этапе II — соотношения между тензорами  $s_{ij}^D$  и  $c_{ij}^D$  (см. табл. 1.9).

В расчетной схеме 2 (см. рис. 1.3) этапы I, IV — 1 и V — 1 аналогичны этапам I и II — 1 расчетной схемы 1 (см. рис. 1.2), однако упругая жесткость  $c_{13}^E$  на этапе II определяется с помощью соотношений между пьезоэлектрическими константами (см. табл. 1.8).

Для определения упругой податливости  $s_{13}$  сначала используется промежуточный этап III, на котором находят пьезоконстанту  $e_{31}$  из соотношений между диэлектрическими констан-

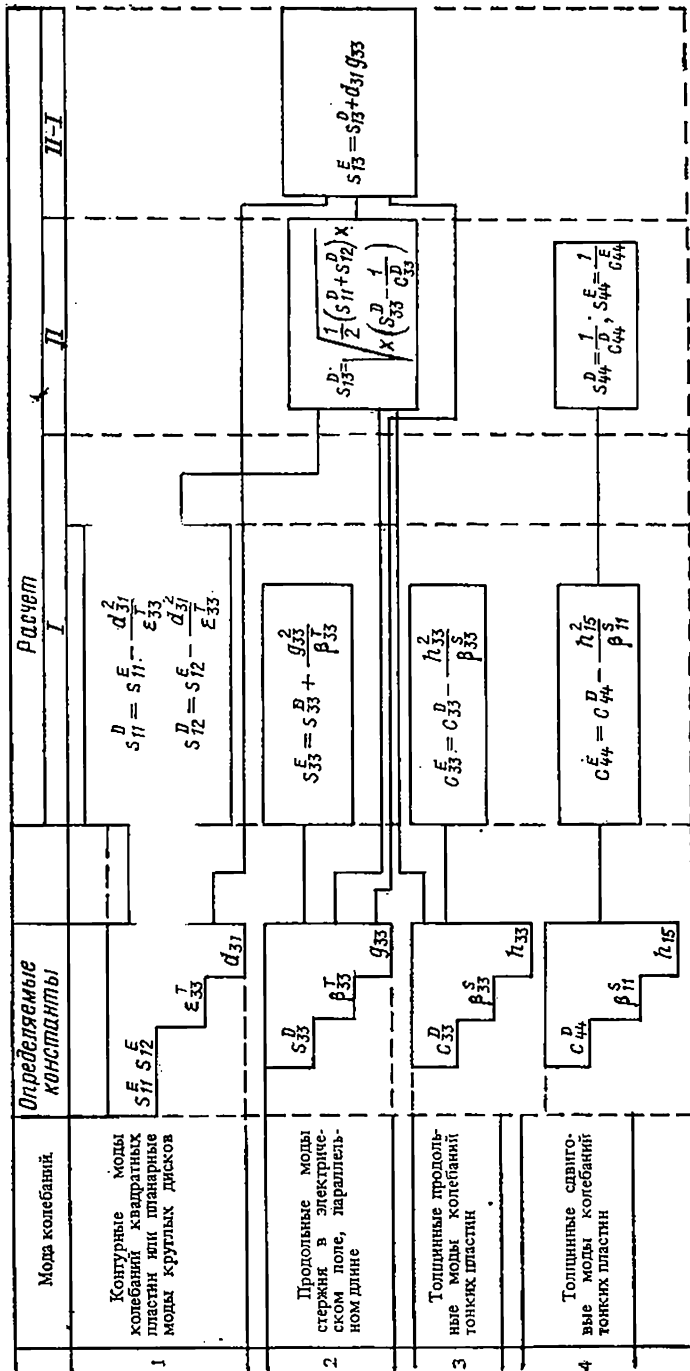


Рис. 1.2. Расчетная схема I для определения констант упругой податливости пьезокерамики.

тами при  $T = \text{const}$  и  $S = \text{const}$  (см. табл. 1.7). Затем на этапе IV проводят расчет  $s_{13}^E$ , используя соотношения между упругими (см. табл. 1.9) и пьезоэлектрическими (см. табл. 1.8) константами. На этапе V определяют  $s_{12}^E$ , используя соотношения между упругими константами (см. табл. 1.9).

На рис. 1.4 и 1.5, построенных по данным работ [137, 122], приведены варианты расчетных схем для определения компонент тензоров пьезоэлектрических констант пьезокерамики.

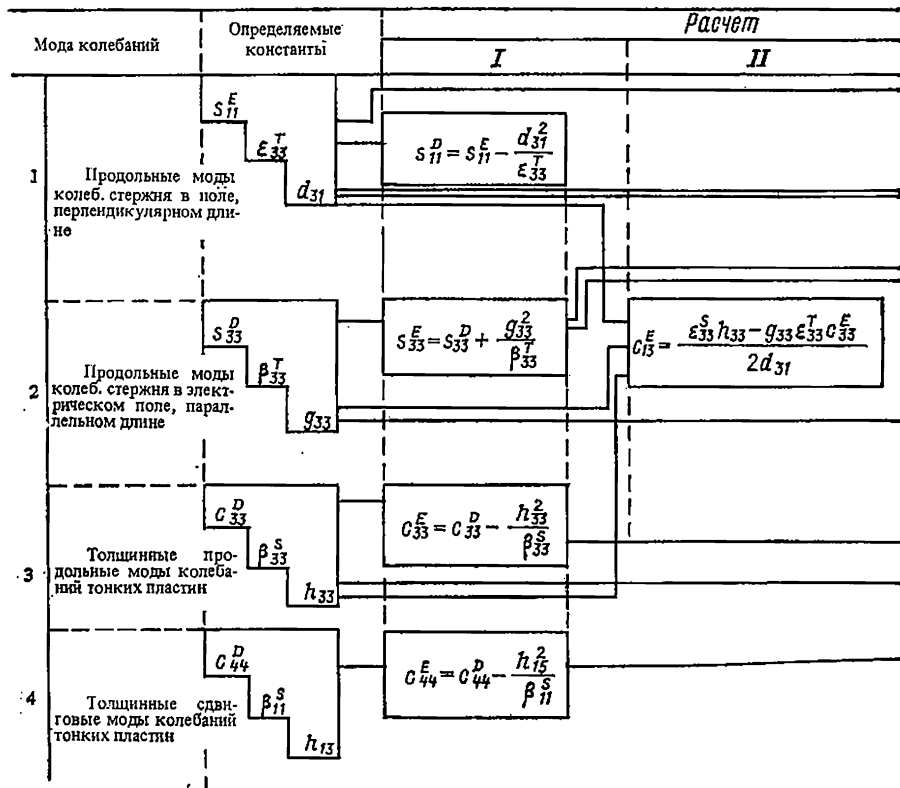


Рис. 1.3. Расчетная схема 2 для определения констант упруг

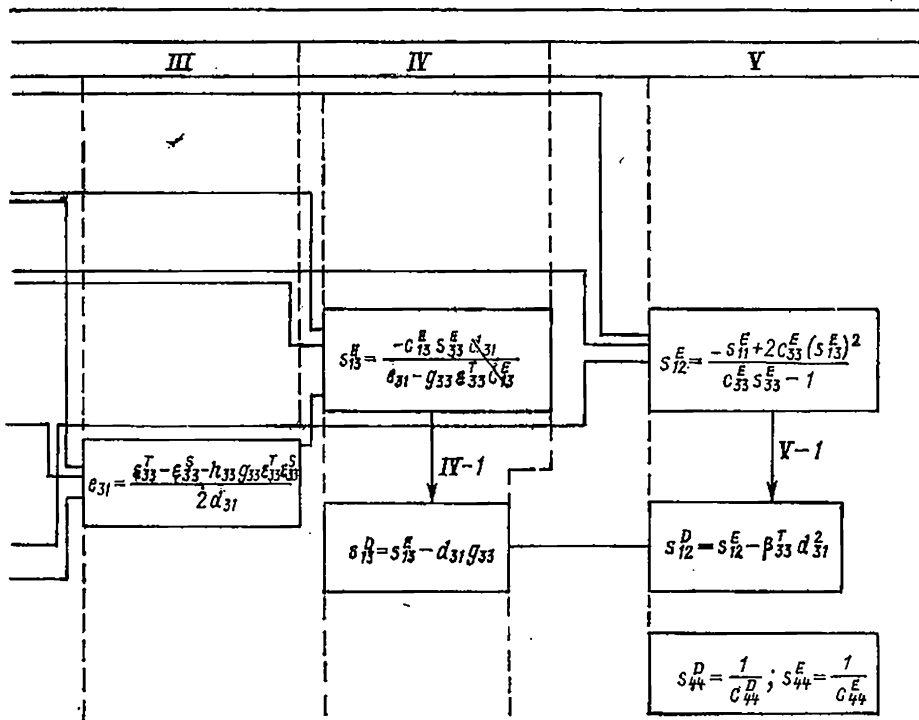
В схеме 1 (см. рис. 1.4) все пьезоэлектрические константы, за исключением сдвиговых, рассчитываются только по данным пьезоэлектрических и диэлектрических измерений. На этапах I и II — используются соотношения между пьезоэлектрическими константами (см. табл. 1.8), а на этапе II — между диэлектрическими константами при  $T = \text{const}$  и  $S = \text{const}$  (см. табл. 1.7).

В схеме 2 (см. рис. 1.5) на этапах I и II рассчитываются недостающие компоненты тензоров упругих констант с использованием данных табл. 1.6 и 1.9. На этапе III для определения  $e_{31}$

и  $d_{33}$  используются соотношения между пьезоэлектрическими константами (см. табл. 1.8). Этап IV аналогичен этапу I расчетной схемы I.

### § 1.3. Коэффициенты электромеханической связи пьезокерамических материалов

Одним из наиболее важных свойств пьезоэлектрических материалов является наличие коэффициентов электромеханической



ой податливости пьезокерамики.

связи (КЭМС). Физический смысл, вкладываемый в понятие КЭМС, дает наиболее полное его определение [112]: «Квадрат КЭМС—это отношение способной к обращению запасенной электрической (механической) энергии ко всей подведенной извне к пьезокерамическому телу механической (электрической) энергии».

Рассматриваемый в настоящем разделе КЭМС, характеризующий случаи статического внешнего воздействия, получил название статического коэффициента, или коэффициента связи



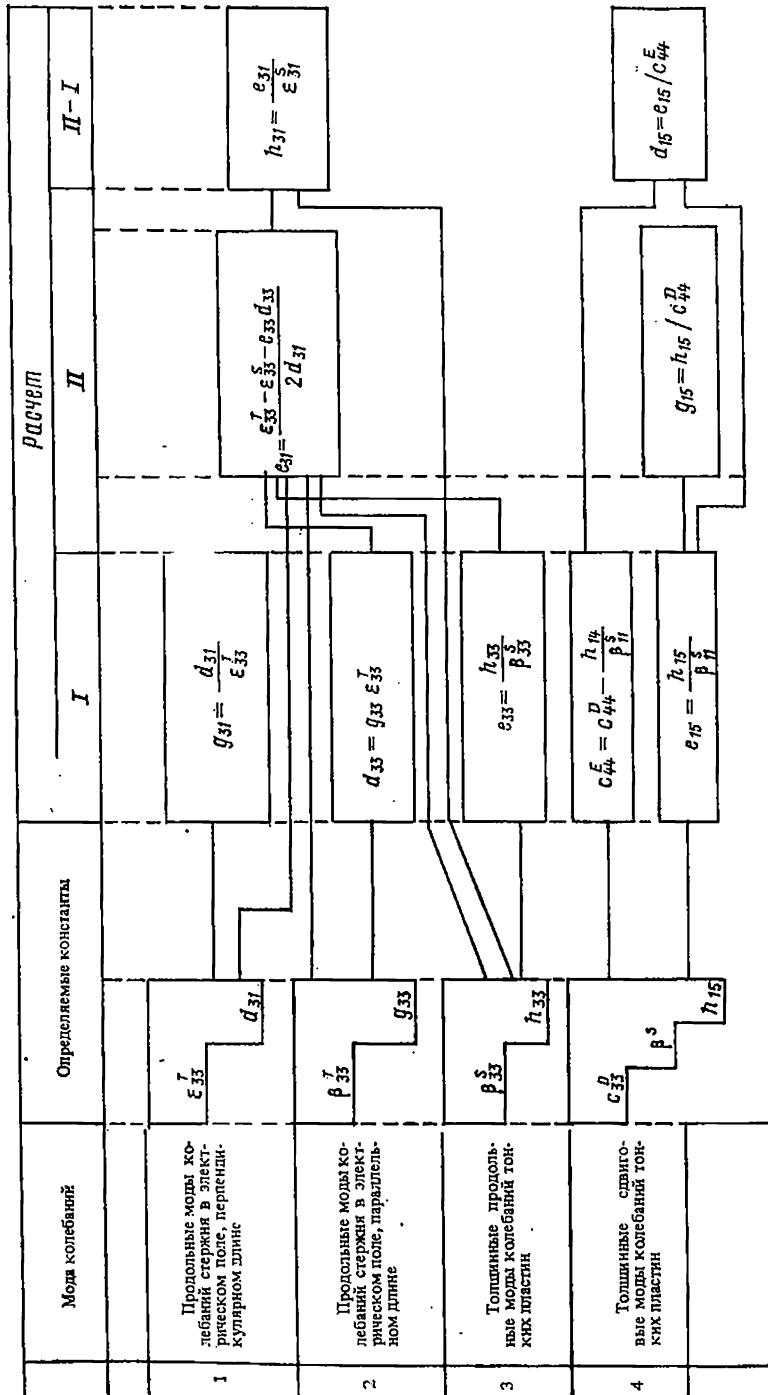


Рис. 1.4. Расчетная схема 1 для определения пьезоэлектрических констант пьезокерамики.

материала  $k$ , в отличие от динамического (эффективного) коэффициента связи  $k_{эф}$  (§ 2.5).

При однородном распределении электроупругих полей в пьезоэлементе КЭМС могут быть определены на основании формально-математических правил, например как отношение плотности взаимной механической (упругой) и электрической энергии  $W_{эм}$  к среднему геометрическому значению плотности внутренних механической  $W_m$  и электрической  $W_s$  энергий

$$k = \frac{W_{эм}}{\sqrt{W_m W_s}}. \quad (1.6)$$

Если в качестве независимых переменных выбрать  $T$  и  $E$ , то, используя уравнение состояния (1) из табл. 1.2, получим

$$\left. \begin{aligned} W_{эм} &= \frac{1}{2} E_m d_{mi} T_i; \\ W_s &= \frac{1}{2} E_m \epsilon_{mk}^T E_k; \\ W_m &= \frac{1}{2} T_i s_{ij}^E T_j. \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

При выборе в качестве независимых переменных экстенсивной и интенсивной величин [уравнение (2) или (3) из табл. 1.2] коэффициент связи определится выражением [117]

$$\frac{k}{\sqrt{1-k^2}} = \frac{W_{эм}}{\sqrt{W_s W_m}}. \quad (1.8)$$

Приведенные определения КЭМС не учитывают механические, диэлектрические и пьезоэлектрические потери в материале.

В общем случае определение  $k$  по выражению (1.6) с учетом, например, (1.7) довольно сложно. В то же время, как указано в § 1.2, для пьезокерамики число независимых констант равно 10, это упрощает выражение для определения КЭМС. Кроме того, при учете конкретных граничных условий выявляется, что отсутствуют те или иные компоненты механического напряжения, а это позволяет получить простые выражения для определения КЭМС материала.

Рассмотрим, например, стержень с электродами на поверхностях, перпендикулярных оси  $X_3$  (рис. 1.6), к которому приложено механическое напряжение  $T_3$ . Стержень имеет малые поперечные размеры по сравнению с длиной, поэтому все компоненты напряжения, кроме  $T_3$ , равны нулю, а  $S_1 = S_2 \neq 0$  и  $S_3 \neq 0$ . Поскольку в этом случае  $D_1 = D_2 = 0$  и  $dD_3/dx_3 = 0$ , то в качестве независимых переменных удобно выбрать  $T$  и  $D$  и, следовательно, использовать уравнение (3) из табл. 1.2.

Коэффициент  $k_{33}$  необходимо в этом случае определять по (1.8)

$$\frac{k_{33}}{\sqrt{1-k_{33}^2}} = \frac{g_{33}}{\sqrt{\beta_{33}^T D_{33}}}. \quad (1.9)$$

С учетом данных табл. 1.6 выражение (1.9) приобретает вид

$$k_{33} = \frac{g_{33}}{\sqrt{\beta_{33}^T \epsilon_{33}^E}} \quad (1.10)$$

Для каждой системы граничных условий и каждой ориентации электрического поля существует свой коэффициент связи.

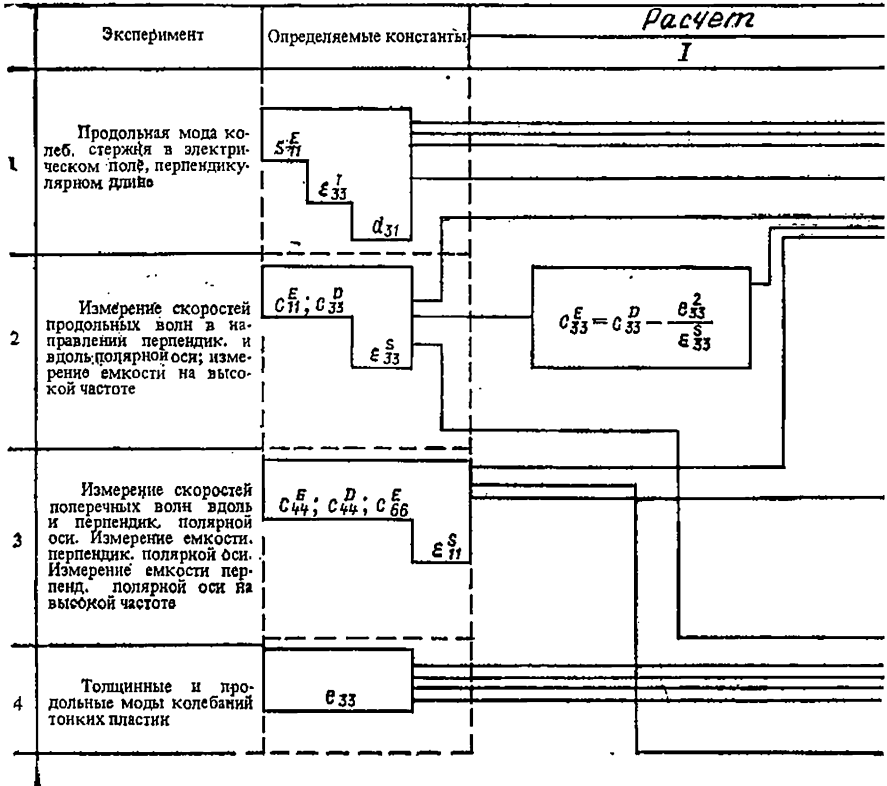
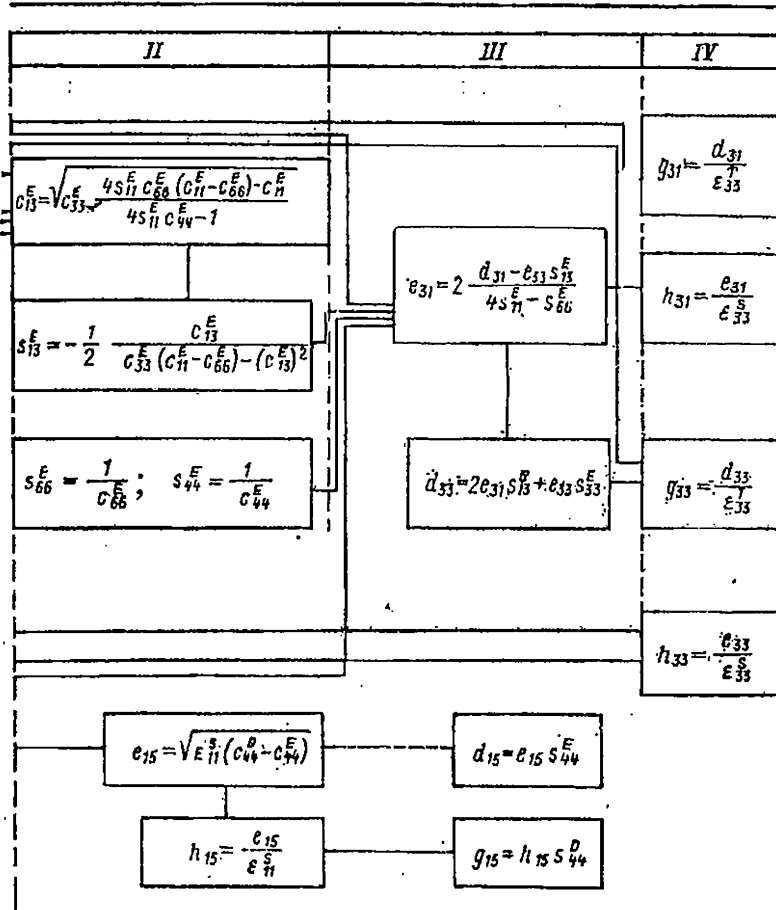


Рис. 1.5. Расчетная схема 2 для определения упругих и пьезоэлектрических констант пьезокерамики.

Согласно [117] пьезокерамика имеет 11 различных коэффициентов связи, описывающих пьезоэффект для электрического поля, параллельного оси  $X_3(Z)$ , и один коэффициент связи для поля, перпендикулярного оси  $X_3$ . Формулы для этих коэффициентов связи, полученные на основе рассмотренного выше правила, вместе с указанием упругих граничных условий приведены в табл. 1.10

За главные КЭМС принимаются  $k_{33}$  и  $k_{31}$  или  $k_D$  — для поля, параллельного оси  $X_3$  и  $k_{15}$  — для поля, перпендикулярного оси  $X_3$ .

При заданной ориентации электрического поля может быть найдена система механических напряжений, позволяющая получить наибольший КЭМС. Такие КЭМС называют инвариантными или собственными. Пьезокерамика имеет два инвариантных



КЭМС:  $k_{13}$  и  $k_{11}$ . Последний двукратно вырожден:  $k_{11} = k_{12}$ . Эти КЭМС определяются отношением диэлектрических проницаемостей свободного и зажатого образцов

$$k_{13}^2 = 1 - \frac{\epsilon_{33}^S}{\epsilon_{33}^T}; \quad (1.11)$$

$$k_{11}^2 = k_{12}^2 = k_{15}^2 = 1 - \frac{\epsilon_{11}^S}{\epsilon_{11}^T}. \quad (1.12)$$

Таблица 1.10. Коэффициенты электромеха

Коэффициент связи	Независимые переменные и уравнения состояния	Формула для определения $k$	Упругие граничные условия
$k_{31}$	$S_i = s_{ij}^E T_j + d_{mi} E_m$ $D_m = d_{mi}^t T_i + \epsilon_{mk}^T E_k$	$k = \frac{W_{эм}}{\sqrt{W_S W_M}}$	Все составляющие тензора механического напряжения равны нулю, кроме $T_1$
$k_p$	То же	То же	То же, кроме $T_1 = T_2$
$k'_{31}$	»	»	$T_3 = 0$ $S_2 = 0$
$k''_{31}$	»	»	$T_2 = 0$ $S_3 = 0$
$k'''_{31}$	»	»	Все составляющие тензора деформации равны нулю, кроме $S_1$
$k'_p$	»	»	$S_3 = 0$
$k_h$	»	»	Вдвустороннее сжатие $T_1 = T_2 = T_3 \neq 0$ $S_1 = S_2 \neq 0$ $S_3 \neq 0$
$k'_i = k'''_{31}$	$T_i = c_{ij}^E S_j - e_{mi} E_m$ $D_m = e_{mj}^t S_j + \epsilon_{mk}^S E_k$	$\frac{k}{\sqrt{1 - k^2}} = \frac{W_{эм}}{\sqrt{W_S W_M}}$	Все составляющие тензора деформации равны нулю, кроме $S_1$
$k_{33}$	$S_i = s_{ij}^D T_j + g_{mi} D_m$ $E_m = -g_{mi}^t T_i + \beta_{mk}^T D_k$	То же	Все составляющие тензора механического напряжения равны нулю, кроме $T_3$

нической связи пьезокерамических материалов

Формула для определения $k$ через константы материала	Значения $k$		$k/k_{13}$		Примеры мод колебаний, определяемых $k$
	ЦТСНВ-1	PZT-5A	ЦТСНВ-1	PZT-5A	
$k_{31} = \frac{d_{31}}{\sqrt{e_{33}^T s_{11}^E}}$	-0,33	-0,344	-0,48	-0,48	СН <sub>t</sub> КН <sub>t</sub> КН <sub>p</sub>
$k_p = \frac{\sqrt{2} d_{31}}{\sqrt{e_{33}^T s_{11}^E (1 - \sigma^E)}}$	-0,56	-0,60	-0,82	-0,84	ДН <sub>t</sub>
$k_p = k_{31} \sqrt{\frac{2}{1 - \sigma^E}}$					СФ <sub>p</sub>
$k'_{31} = \frac{k_{31}}{\sqrt{1 - k_{31}^2}} \sqrt{\frac{1 + \sigma^E}{1 - \sigma^E}}$	-0,48	-0,527	-0,70	-0,74	ПС <sub>t</sub> - 1
$k''_{31} = \frac{k_{31} - Bk_{33}}{\sqrt{(1 - k_{33}^2)(1 - B^2)}}$	-0,084	-0,08	-0,12	-0,11	ПС <sub>t</sub> - 2
$k'''_{31} = \sqrt{\frac{(k_p - Ak_{33})^2}{1 - A^2} - (k_{31} - Bk_{33})^2} / \sqrt{1 - k_{33}^2 - (k_{31} - Bk_{33})^2}$	-0,146	-0,178	-0,21	-0,22	ПВ <sub>t</sub>
$k'_p = \frac{k_p - Ak_{33}}{\sqrt{(1 - A^2)(1 - k_{33}^2)}}$	-0,179	-0,179	-0,26	-0,25	ЦВ <sub>t</sub>
$k_h = \frac{2d_{31} + d_{33}}{\sqrt{e_{33}^T [2(s_{11}^E + s_{12}^E) + 4s_{13}^E + s_{33}^E]}}$	0,085	0,072	0,12	0,1	-
$k_h = \frac{d_h}{\sqrt{e_{33}^T s_h^E}}$					
$k'_t = \frac{e_{31}}{\sqrt{1 - (k'_t)^2}} = \frac{e_{31}}{\sqrt{e_{33}^T \epsilon_{11}^E}}$	-0,146	-0,178	-0,21	-0,22	ПВ <sub>t</sub>
$k'_t = \frac{e_{31}}{\sqrt{e_{33}^T \epsilon_{11}^D}}$					
$\frac{k_{33}}{\sqrt{1 - k_{33}^2}} = \frac{g_{33}}{\sqrt{\beta_{33}^T s_{33}^D}}$	0,67	0,705	0,98	0,99	СН <sub>p</sub>
$k_{33} = \frac{g_{33}}{\sqrt{\beta_{33}^T s_{33}^E}}$					ЦН <sub>p</sub>

Коэффициент связи	Независимые переменные и уравнения состояния	Формула для определения $k$	Упругие граничные условия
$k_{33}^*$	$S_i = s_{ij}^D T_j + g_{mi} D_m$ $E_m = -g_{mi}^t T_i + \beta_{mk}^T D_k$	$\frac{k}{\sqrt{1-k^2}} = \frac{W_{9M}}{\sqrt{W_S W_M}}$	$T_2 = 0$ $S_1 = 0$
$k_t$	$T_i = c_{ij}^D S_j - h_{mi} D_m$ $E_m = -h_{mi}^t S_i + \beta_{mk}^S D_k$	$k = \frac{W_{9M}}{\sqrt{W_S W_M}}$	Все составляющие тензора деформаций равны нулю, кроме $S_3$
$k_{15} =$ $= k_{24} =$ $= k_{11}$	То же	То же	То же, кроме $S_5$
$k_{i3}$	—	—	—

Примечания:  $1. \sigma^E = \frac{-s_{12}^E}{s_{11}^E}$ ;  $A = \frac{\sqrt{2} s_{13}^E}{\sqrt{s_{33}^E (s_{11}^E + s_{12}^E)}}$ ;  $B = \frac{s_{13}^E}{\sqrt{s_{11}^E s_{33}^E}}$ ;

Все КЭМС, приведенные в табл. 1.10, характеризующие продольные колебания, как это показано в § 2.5, могут быть связаны с  $k_{i3}$ .

Формулы для определения КЭМС можно получить также, исходя из физического смысла, вкладываемого в понятие  $k$ . Для этого может быть рассмотрен идеализированный цикл изменения упругого или электрического состояния пьезоэлектрического образца [124].

Проанализируем пример, приведенный на рис. 1.6. Перед приложением  $T_3$  замкнем накоротко электроды пьезоэлемента, т. е. обеспечим  $E_3 = 0$ . При сжатии пьезоэлемента ( $T_3$  — отрицательно) тангенс угла наклона прямой  $S_3 = s_{33}^E T_3$  равен  $s_{33}^E$  (рис. 1.7). Прежде чем удалить сжимающее напряжение, разомкнем элемент (условию  $D_3 = 0$  отвечает точка 1 на рис. 1.7).

Формула для определения $k$ через константы материала	Значения $k$		$k/k_{i3}$		Примеры мод колебаний, определяемых $k$
	ЦТСНВ-1	PZT-5A	ЦТСНВ-1	PZT-5A	
$k_{33}^* =$	—	0,66	—	0,92	ПС <sub>p</sub>
$= \left[ 1 + \frac{s_{33}^D (1 - M^2)}{\varepsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \left( g_{33} - g_{31} \frac{s_{13}^D}{s_{33}^D} \right)^2} \right]^{-1/2}$					
$k_t = \frac{h_{33}}{\sqrt{\beta_{33}^S c_{33}^D}}$	0,48	0,486	0,70	0,68	ДВ <sub>p</sub>
$k_t = \frac{k_{33} - Ak_p}{\sqrt{(1 - A^2)(1 - k_p^2)}}$					ПлВ <sub>p</sub>
$k_{15} = \frac{h_{15}}{\sqrt{\beta_{11}^S c_{44}^D}}$	0,66	0,685	—	—	ПлСВ <sub>p</sub>
$k_{15} = \frac{d_{15}}{\sqrt{\varepsilon_{11}^T s_{44}^E}}$					
$k_{i3} = \sqrt{\frac{k_p^2 + k_{33}^2 - 2Ak_p k_{33}}{1 - A^2}}$	0,683	0,715	1	1	—

$M = \frac{s_{13}^D}{\sqrt{s_{11}^D s_{33}^D}}$ . Обозначения мод колебаний соответствуют табл. 2.1 и 2.2.

При этом тангенс угла наклона прямой  $S_3 = s_{33}^D T_3$  равен  $s_{33}^D$ . Завершая цикл, элемент замыкают на электрическую нагрузку (точка 2 на рис. 1.7).

Из рис. 1.7 видно, что при идеализированном цикле энергия  $W_1$  сообщается электрической нагрузке, а энергия  $W_2$ , запасенная при сжатии, в электрическую нагрузку не поступает. Если вся энергия, поступившая от источника  $W = W_1 + W_2$ , то используя рис. 1.7,  $k_{33}$  может быть определен следующим образом

$$k_{33}^2 = \frac{W_1}{W} = \frac{s_{33}^E - s_{33}^D}{s_{33}^E} \quad (1.13)$$

Учитывая связь между  $s_{33}^E$  и  $s_{33}^D$  (см. табл. 1.6), из (1.13) получают выражение для  $k_{33}$ , аналогичное (1.10).



Выражение для  $k_{33}$  можно получить также из анализа цикла, соответствующего преобразованию энергии электрического источника в механическую (рис. 1.8).

Свободный пьезоэлемент присоединяется к электрическому источнику напряженностью  $E_3$ . Перед снятием электрического напряжения пьезоэлемент зажимается в направлении  $X_3$  так, чтобы выполнялось условие  $S_3 = 0$  (точка 1 на рис. 1.8). Затем идеальный зажимающий механизм заменяется конечной механической нагрузкой (точка 2 на рис. 1.8).

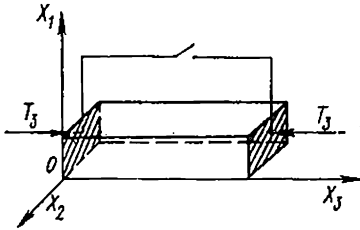


Рис. 1.6. Пьезокерамический элемент для определения  $k_{33}$  ( $l \gg l, w$ ).

При использовании диаграммы, приведенной на рис. 1.8, выражение для  $k_{33}$  имеет вид

$$k_{33}^2 = \frac{W_1}{W} = \frac{e_{33}^T - e_{33}^{S_3=0}}{e_{33}^T}, \quad (1.14)$$

где  $e_{33}^{S_3=0}$  — диэлектрическая проницаемость заторможенного пьезоэлемента ( $S_3 = 0; S_1 = S_2 \neq 0$ ).

Связь между  $e_{33}^T$  и  $e_{33}^{S_3=0}$  может быть получена из соответствующих уравнений состояния, и определяемое таким образом значение  $k_{33}$  идентично (1.11).

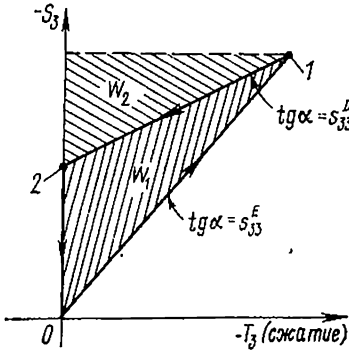


Рис. 1.7. Диаграмма изменения упругого состояния пьезоэлемента, изображенного на рис. 1.6.

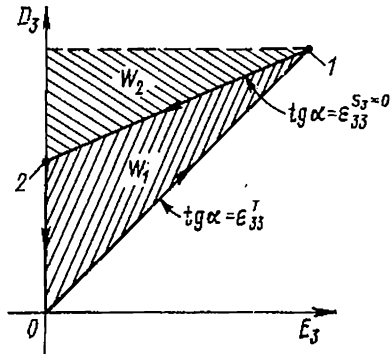


Рис. 1.8. Диаграмма изменения электрического состояния пьезоэлемента, изображенного на рис. 1.6.

Выражения (1.13) и (1.14) устанавливают связь между упругими константами, зависящими от электрических граничных условий, и диэлектрическими константами, зависящими от механических граничных условий, через соответствующие коэффициенты связи.

На основании приведенного примера можно дать еще одно, более конкретное, определение КЭМС [124]: квадрат КЭМС —

это отношение электрической (механической) работы, которая может быть выполнена при идеальных условиях, ко всей энергии, полученной из механического (электрического) источника.

В соответствии с определением КЭМС не имеет знака. Однако принимается, что знак коэффициента совпадает со знаком соответствующей пьезоконстанты.

Ценность введения КЭМС связана с тем, что он характеризует эффект преобразования энергии лучше, чем набор упругих, диэлектрических и пьезоконстант материалов [117], позволяя сравнивать пьезоматериалы с существенно различными уровнями диэлектрической проницаемости и упругости. От КЭМС существенно зависят такие характеристики, как ширина полосы пропускания, КПД, удельная чувствительность [114].

Если характер преобразования энергии аналогичен для всех точек колеблющегося тела, то  $k$  совпадает с  $k_{эф}$ , характеризующим процесс преобразования энергии на каком-либо резонансе. В общем случае:

$$k_{эф} \leq k. \quad (1.15)$$

Связь между этими коэффициентами показана в § 2.5.

Исходя из приведенного энергетического определения, понятие эффективного коэффициента связи можно обобщить на случай колебаний произвольной частоты [112] и произвольного расположения электродов [113].

#### § 1.4. Диссипация энергии в пьезокерамике

Анализ диссипации энергии в пьезоматериале, имеющем электромеханическую связь, представляет собой сложную задачу, решение которой затрудняется амплитудной зависимостью коэффициентов, описывающих диссипацию. Любой пьезоэлектрический материал имеет механические и диэлектрические потери, макроскопическое описание которых приведено, например, в монографиях [92, 106]. Эти виды потерь могут быть учтены, например, комплексным представлением упругих и диэлектрических констант:

$$\operatorname{tg} \delta_m = \frac{s''}{s'} \quad (\text{или } \frac{c''}{c'}); \quad (1.16)$$

$$\operatorname{tg} \delta_\epsilon = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \quad (\text{или } \frac{\beta''}{\beta'}). \quad (1.17)$$

В ряде работ, например [133, 140], предложено учитывать в пьезоэлектрике пьезоэлектрические потери

$$\operatorname{tg} \delta_{эм} = \frac{d''}{d'} \left( \frac{\epsilon''}{\epsilon'}, \frac{g''}{g'}, \frac{h''}{h'} \right). \quad (1.18)$$

Это нашло экспериментальное подтверждение [96, 132].

**Упругие потери.** Механические колебания сколь угодно сложной колебательной системы можно представить в виде суммы

членов, каждый из которых описывает колебания элементарного осциллятора. Поэтому способы описания диссипации энергии в элементарном осцилляторе при простоте рассмотрения применимы к любой сложной колебательной системе.

Основным типом механической колебательной системы является система с сосредоточенной массой и упругостью (элемен-

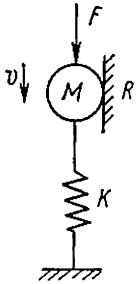


Рис. 1.9. Элементарный осциллятор и его механическая эквивалентная схема.

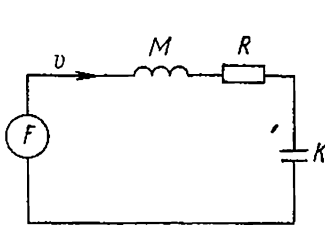
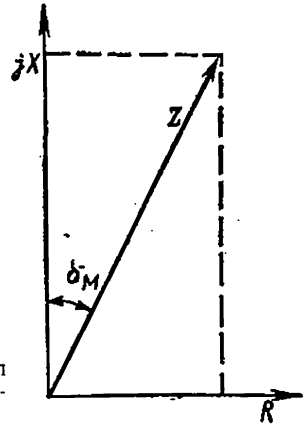


Рис. 1.10. Угол механических потерь.



тарный осциллятор). Уравнение движения элементарного осциллятора (рис. 1.9) имеет вид

$$M \frac{dv}{dt} + Rv + \frac{1}{K} \xi = F, \quad (1.19)$$

где  $M$  — масса осциллятора;  $v$  — скорость колебаний;  $\xi$  — смещение;  $K$  — упругая податливость пружины;  $F$  — сила, действующая на осциллятор;  $R$  — сопротивление механических потерь.

Преобразуя (1.19), получаем

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2\delta \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 v = \frac{1}{M} \frac{dF}{dt}, \quad (1.20)$$

где  $\delta = R/(2M)$ ;  $\omega_0^2 = 1/MK$ ;

В случае гармонических колебаний (1.19) сводится к алгебраическому уравнению

$$\left( j\omega M + R + \frac{1}{j\omega K} \right) v = F, \quad (1.21)$$

решение которого имеет вид

$$v = \frac{F}{R + j\omega M + (1/j\omega K)} = \frac{F}{Z}, \quad (1.22)$$

где  $F = F_0 e^{j\omega t + \varphi F}$ ;  $Z = R + j\omega M + (1/j\omega K)$  — механический импеданс элементарного осциллятора, который можно преобразо-

вать также к виду

$$Z = R + j\omega_0 M\nu = R + jQR\nu = R(1 + jQ\nu), \quad (1.23)$$

где

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{MK}}; \quad \nu = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}; \quad Q = \frac{\omega_0 M}{R}. \quad (1.24)$$

Из (1.23) следует, что при больших  $Q$  роль потерь вне области резонанса мала. Тогда  $Z \cong j\omega_0 M\nu$ . При малых  $Q$  потери существенны во всем диапазоне частот.

Величину  $Q$  называют добротностью колебательной системы. Она равна отношению инерционного (или упругого) реактивного сопротивления на резонансной частоте к сопротивлению потерь.

Величину  $\eta$ , обратную добротности, называют коэффициентом потерь

$$\eta = \operatorname{tg} \delta_m, \quad (1.25)$$

где  $\delta_m$  — угол между вектором импеданса диссипативного элемента  $Z = R + j\omega_0 M\nu$  и мнимой осью (рис. 1.10).

Добротность и коэффициент потерь связаны с другими характеристиками шириной полосы резонансной кривой ( $\nu_1 - \nu_2$ )

$$\nu_1 - \nu_2 = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega_0^2} \approx \frac{2(\omega_1 - \omega_2)}{\omega_0} = \frac{2}{Q} \quad (1.26)$$

и коэффициентом затухания амплитуды колебаний

$$\delta = \frac{R}{2M} = \frac{\omega_0 \eta}{2} = \frac{\omega_0}{2Q}. \quad (1.27)$$

Согласно [106] различают три типа трения: 1) постоянное или кулоновское; 2) жидкостное; 3) твердого тела.

Кулоновское трение пропорционально массе движущегося элемента и не зависит от скорости его движения. Этот тип трения практически отсутствует в простых колебательных системах и не представляет интереса в рассматриваемом случае.

Жидкостное трение — классический вид внутреннего трения, когда сопротивление потерь постоянно, а сила сопротивления пропорциональна скорости. Пример этого вида потерь рассмотрен в приведенном выше случае элементарного осциллятора.

Трение твердого тела характерно для упругих деформаций твердых тел и представляет наибольший интерес в нашем случае.

Опыт показывает, что элементом преобразования механической энергии в теплоту является податливость. Добротность элемента податливости представляет собой коэффициент, зависящий только от свойств материала. В связи с этим ее удобнее записать в виде

$$Q_\tau = \frac{1}{\omega KR}. \quad (1.28)$$

Хотя в общем случае  $Q_T$  зависит от частоты; экспериментально установлено, что для большинства твердых тел  $Q_T$  приближенно постоянна в звуковом диапазоне частот. Поэтому в случае трения твердого тела принимают в качестве константы материала механическую добротность  $Q_T$ . Тогда сопротивление потерь обратно пропорционально частоте  $R = 1/(\omega K Q_T)$ .

При постоянстве  $Q_T$  механический импеданс удобно записать в виде

$$Z = R + j\omega M + \frac{1}{j\omega K} = R(1 + jQ_T v'), \quad (1.29)$$

где  $v' = (\omega/\omega_0)v$ .

При моделировании пьезокерамического резонатора (см. гл. 2) обычно применяется эквивалентная механическая схема с сосредоточенными постоянными, где принимается  $R = \text{const}$ , что соответствует случаю жидкостного трения, или в общем случае механической системы — внешнему трению, пропорциональному скорости.

В случае свободных колебаний пьезорезонатора механические потери, представляемые такой схемой, соответствуют трению твердого тела. Поэтому сопротивление механических потерь  $R$  частотно-зависимо.

Поскольку внутреннее трение определяется деформацией элементов податливости, то в уравнении (1.19) целесообразно объединить сопротивление потерь и податливость, учитывая, что для гармонического возбуждения  $d\xi/dt = j\omega\xi$

$$M \frac{d^2\xi}{dt^2} + \Lambda \xi = F, \quad (1.30)$$

где  $\Lambda = (1/K)(1 + j\omega KR) = \Lambda_0(1 + j\eta)$  — комплексная жесткость. Из (1.30) следует, что действительная часть  $\Lambda$  определяет жесткость системы, а мнимая пропорциональна коэффициенту потерь.

Упругие свойства пьезокерамики описываются пятью независимыми упругими константами (см. § 1.2). Соответственно этому в ней различают пять независимых видов внутреннего трения, описываемых комплексной величиной каждой из констант.

В твердом теле внутреннее трение может быть гистерезисного или релаксационного типа. Характер внутреннего трения позволяет определить частотная зависимость  $\eta$ .

Гистерезис проявляется в эффекте запаздывания. Он характеризуется остаточной деформацией податливого элемента после снятия внешней силы. Постоянная гистерезиса определяется как отношение остаточного смещения  $\xi_r$  к максимальному  $\xi_0$ :

$$\eta_H = \frac{\xi_r}{\xi_0}. \quad (1.31)$$

Показано [106], что с точностью до членов порядка  $\eta_n^2$  справедливо  $\eta_H \approx \eta$ , если смещение запаздывает на фазовый угол  $\alpha$  относительно заданной силы  $F = F_0 \cos \omega t$ . При этом  $\eta_H = \sin \alpha \approx \alpha$ .

Если жесткость не зависит от частоты, то идеальному механическому гистерезису соответствует постоянное значение  $\eta$ ; если зависит, наблюдается более сложное явление — *релаксация*.

В общем случае релаксационное уравнение имеет вид

$$\xi + \tau_{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = K \left( F + \tau_F \frac{\partial F}{\partial t} \right), \quad (1.32)$$

где  $\tau_{\xi}$  и  $\tau_F$  — времена релаксации деформаций и напряжений.

Поскольку для периодических колебаний  $\partial \xi / \partial t = j\omega \xi$ , из (1.32) следует релаксационное уравнение, определяющее комплексную жесткость или соответствующую упругую константу:

$$\Lambda = \Lambda' + j\Lambda'' = \frac{F}{\xi} = \frac{1}{K} \frac{(1 + \omega^2 \tau_{\xi} \tau_F) + j\omega (\tau_{\xi} - \tau_F)}{1 + \omega^2 \tau_F^2}. \quad (1.33)$$

Уравнение (1.33) иллюстрируется рис. 1.11. Видно, что действительная часть комплексной упругой константы (рис. 1.11, а)

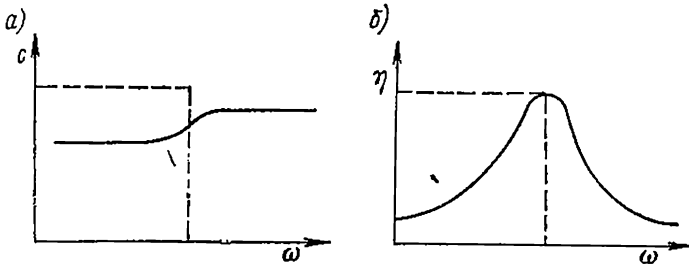


Рис. 1.11. Упругая постоянная (а) и коэффициент потерь (б) при простой релаксации.

зависит от частоты и имеет точку перегиба. Коэффициент потерь (рис. 1.11, б) в этой области частот, называемой областью релаксации, имеет максимум.

**Диэлектрические потери.** Основной вклад в диссипацию электрической энергии на переменном токе в пьезокерамике вносят поляризационные процессы. Поскольку эти процессы определяются диэлектрическими свойствами материала, то наиболее удобным является представление потерь при поляризационных процессах введением комплексной диэлектрической проницаемости

$$\epsilon = \epsilon' - j\epsilon'' \quad (1.34)$$

и тангенса угла диэлектрических потерь

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\epsilon''}{\epsilon'}. \quad (1.35)$$

В большинстве случаев  $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon'' = \text{const}$ , следовательно,  $\operatorname{tg} \delta = \text{const}$ . Последнее условие отвечает процессам поляриза-

ции, не зависящим от скорости изменения электрического поля. Однако, как показывает опыт, диэлектрики, и в особенности сегнетоэлектрики, характеризуются целым спектром релаксационных механизмов поляризации, когда в зависимости от скорости изменения частоты колебаний не успевают устанавливаться те или иные процессы поляризации. В подобных случаях комплексная диэлектрическая проницаемость зависит от частоты

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) - j\varepsilon''(\omega). \quad (1.36)$$

Поскольку действительная и мнимая части комплексной диэлектрической проницаемости описывают один и тот же физический процесс — поляризацию, их изменение с частотой должно быть взаимозависимым. Для линейных диэлектриков эта зависимость выражается соотношениями Крамерса — Кронига

$$\varepsilon'(\omega) - \varepsilon_\infty = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \varepsilon''(\Omega) \frac{\Omega d\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}; \quad (1.37)$$

$$\varepsilon''(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [\varepsilon'(\Omega) - \varepsilon_\infty] \frac{\omega d\Omega}{\Omega^2 - \omega^2}, \quad (1.38)$$

где  $\varepsilon_\infty$  соответствует частотам, на которых рассматриваемый механизм поляризации не реализуется.

Соотношения (1.37) — (1.38) носят универсальный характер и позволяют контролировать экспериментальные результаты, а также прогнозировать потери.

**Плотность мощности диссипации энергии в пьезоэлектрике и матрица констант диссипации для пьезокерамики.** В общем случае величина удельной мощности потерь или плотность мощности диссипации энергии в пьезоэлектрике определяется как отрицательная действительная часть дивергенции обобщенного вектора потока энергии, вектора Умова-Пойнтинга  $\vec{\Sigma}$  [133]:

$$P_d = -\operatorname{Re}(\operatorname{div} \vec{\Sigma}) = -\frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{H}^* \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H}^* + j\omega \vec{T} : \operatorname{grad} \vec{\xi}^* + j\omega \vec{\xi}^* \operatorname{div} \vec{T}), \quad (1.39)$$

где  $\vec{\Sigma} = (1/2)(\vec{E} \vec{H}^* - T \vec{U}^*)$ ;  $\vec{U}$  — колебательная скорость;  $\vec{H}$  — напряженность магнитного поля. В (1.39) и далее частотный фактор  $e^{i\omega t}$  опускается. Звездочкой помечаются комплексно-сопряженные величины, точка в произведении тензоров обозначает свертку, двоеточие — двойную свертку.

Используя уравнения Максвелла для поля в диэлектрике при гармоническом воздействии  $\operatorname{rot} \vec{E} = -i\omega \vec{B}$ ,  $\operatorname{rot} \vec{H} = j\omega \vec{D}$  уравнения движения для сплошной среды  $\operatorname{div} T = -\omega^2 \rho \xi$ , а также то, что деформация есть симметричная часть  $\operatorname{grad} \xi$ , получаем выра-

жение для удельной мощности диссипации энергии в пьезоэлектрике [133]:

$$P_d = \frac{1}{2} \omega \operatorname{Im} (E_m D_n^* + T_i S_j^*) \quad (1.40)$$

или, используя уравнения состояния:

$$P_d = \frac{\omega}{2} \operatorname{Im} (E_m d_{mi}^* T_i^* + E_m \varepsilon_{mn}^{T*} E_n^* + T_j s_{ji}^{E*} T_i^* + T_j d_{nj}^* E_n^*). \quad (1.41)$$

Более компактную запись (1.41) даст введение девятимерного обобщенного вектора силы  $\bar{F}_p$  [133]

$$|F_p\rangle = \begin{bmatrix} T_m \\ E_i \end{bmatrix}, \quad (1.42)$$

а также  $9 \times 9$  симметричной матрицы коэффициентов, которая должна быть отделена в действительную и мнимую части:

$$[M_{pq}^*] = \begin{bmatrix} s_{ij}^{E*} & d_{mj}^* \\ d_{jm}^* & \varepsilon_{mn}^{T*} \end{bmatrix}, \quad (1.43)$$

где  $p, q = 1 \div 9$ .

Для рассматриваемого в (1.43) набора констант знаки мнимых частей комплексных констант определяются следующим образом:

$$M_{pq} = M'_{pq} - jM''_{pq}. \quad (1.44)$$

Таким образом, учитывая (1.42) и (1.43), а также, что все компоненты  $F_p$  — независимые переменные и их можно выбрать так, что угол между  $F_p$  и  $F_q$  будет  $\theta_{pq} = 0, \pi$ , удельная мощность диссипации энергии представляется в виде

$$P_d = \frac{1}{2} \omega \sum_{p, q=1}^9 |F_p| |F_q| M''_{pq} \quad (1.45)$$

в (1.45) правило суммирования по повторяющимся индексам не используется, и  $|F_p| = \{[\operatorname{Re}(F_p)]^2 + [\operatorname{Im}(F_p)]^2\}^{1/2}$ .

Из (1.45) следует, что полная удельная мощность диссипации энергии в пьезоэлектрике определяется суммой удельных мощностей потерь внутреннего механического трения  $\frac{1}{2} \omega |T_i| |T_j| s_{ij}^{E''}$ , диэлектрических потерь, определяемых поляризационными процессами,  $\frac{1}{2} \omega |E_m| |E_n| \varepsilon_{mn}^{T''}$  и пьезоэлектрических потерь, проявляющихся в процессе преобразования энергии,  $\frac{1}{2} \omega |E_m| |T_i| d_{mi}^*$ .

Исходя из условия пассивности пьезокерамического материала, из (1.45) следует требование положительной определенности матрицы  $M''_{pq}$ . Последнее на основании применения теорем линейной алгебры с учетом упругопьезодиэлектрической



матрицы для пьезокерамики накладывает ограничения на коэффициенты диссипации пьезокерамики [133], которые удобнее представить в безразмерной форме:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_{s_{11}}^E &\geq \sigma^{E'} | \operatorname{tg} \varphi_{s_{12}}^E |; \\ \operatorname{tg} \varphi_{s_{11}}^E \operatorname{tg} \varphi_{s_{33}}^E &\geq B^2 (\operatorname{tg} \varphi_{s_{13}}^E)^2; \\ \operatorname{tg} \varphi_{s_{33}}^E \operatorname{tg} \varphi_{s_p}^E &\geq A^2 (\operatorname{tg} \varphi_{s_{13}}^E)^2; \\ \operatorname{tg} \varphi_{s_{11}}^E \operatorname{tg} \varphi_{e_{33}}^T &\geq k_{31}^2 (\operatorname{tg} \varphi_{d_{11}})^2; \\ \operatorname{tg} \varphi_{s_{33}}^E \operatorname{tg} \varphi_{e_{33}}^T &\geq k_{33}^2 (\operatorname{tg} \varphi_{d_{33}})^2; \\ \operatorname{tg} \varphi_{s_{33}}^D \operatorname{tg} \varphi_{e_{33}}^T &\geq [k_{33}^2 / (1 - k_{33}^2)] (\operatorname{tg} \varphi_{d_{33}})^2; \\ \operatorname{tg} \varphi_{e_{33}}^T \operatorname{tg} \varphi_{s_p} &\geq k_p^2 (\operatorname{tg} \varphi_{d_{31}})^2; \\ \operatorname{tg} \varphi_{s_{11}}^E \operatorname{tg} \varphi_{e_{11}}^T &\geq k_{15}^2 (\operatorname{tg} \varphi_{d_{15}})^2, \end{aligned} \right\} \quad (1.46)$$

где  $\sigma^{E'} = -(s_{12}^{E'}/s_{11}^{E'})$ ;  $B^2 = (s_{13}^{E'})^2 / (s_{11}^{E'})(s_{33}^{E'})$ ;  $A^2 = 2(s_{13}^{E'})^2 / [(s_{33}^{E'}) \times (s_{11}^{E'} + s_{12}^{E'})]$ ;

$\operatorname{tg} \varphi_{s_{ij}}^E = 1/Q_{M_{ij}}^E = (s_{ij}^{E'}) / (s_{ij}^E)'$ ;  $\operatorname{tg} \varphi_{e_{mn}}^T = 1/Q_{e_{mn}}^T = (e_{mn}^T)'' / (e_{mn}^T)'$ ;

$\operatorname{tg} \varphi_{d_{im}} = (d_{im})'' / (d_{im})'$ .

Таким образом, пьезокерамический материал характеризуется пятью видами внутреннего механического трения, например  $\operatorname{tg} \varphi_{s_{11}}^E$ ,  $\operatorname{tg} \varphi_{s_{12}}^E$ ,  $\operatorname{tg} \varphi_{s_{13}}^E$ ,  $\operatorname{tg} \varphi_{s_{33}}^E$ ,  $\operatorname{tg} \varphi_{s_{15}}^E$ ; двумя видами диэлектрических потерь:  $\operatorname{tg} \varphi_{e_{11}}^T$ ,  $\operatorname{tg} \varphi_{e_{33}}^T$ , а также тремя видами пьезоэлектрических потерь:  $\operatorname{tg} \varphi_{d_{11}}$ ;  $\operatorname{tg} \varphi_{d_{33}}$ ;  $\operatorname{tg} \varphi_{d_{15}}$ .

В опубликованных к настоящему времени результатах не оговаривалось, какому из упругих коэффициентов соответствует определяемая величина, например, механической добротности. Между тем в динамическом режиме на продольной моде колебаний стержня в поле, перпендикулярном его длине, определяется значение  $\operatorname{tg} \varphi_{s_{11}}^E$ , а в поле, параллельном его длине, — значение  $\operatorname{tg} \varphi_{s_{33}}^D$ , при толщинных колебаниях пластин —  $\operatorname{tg} \varphi_{s_{33}}^D$  и т. д.

Наиболее часто механическая добротность пьезокерамических материалов определяется на радиальной моде колебаний диска или продольной моде колебаний стержня в электрическом поле, перпендикулярном длине стержня. В указанных случаях одинаковое значение добротности ( $Q_{s_{11}}^E = 1/\operatorname{tg} \varphi_{s_{11}}^E$ ) должно достигаться при условии  $\operatorname{tg} \varphi_{s_{11}}^E = \operatorname{tg} \varphi_{s_{12}}^E$ . При несоблюдении этого условия величина добротности, определяемая на радиальных колебаниях диска, может отличаться от  $Q_{s_{11}}^E$  в зависимости от знака разности  $\varphi_{s_{11}}^E - \varphi_{s_{12}}^E$ .

Автором настоящего параграфа по методу, предложенному в [96], впервые определены все коэффициенты, описывающие

Таблица 1.11. Действительные и мнимые части констант тензора упругой податливости и жесткости пьезокерамики ЦТС-19

Действительные части констант	$s_{11}^E$	$s_{12}^E$	$s_{13}^E$	$s_{33}^E$	$s_{44}^E$	$s_{11}^D$	$s_{12}^D$	$s_{13}^D$	$s_{33}^D$	$s_{44}^D$	$c_{11}^E$	$c_{12}^E$	$c_{13}^E$
	$10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}$						$10^{-10} \text{ Н}/\text{м}^2$						
$s, c$	15,2	-5,8	-5,3	16,9	42,6	14,0	-7,0	-2,4	9,9	25,6	10,9	6,1	5,4
$s, c$	15,1	-5,50	-5,62	16,0	40,1	14,2	-6,54	-3,16	10,2	28,4	11,2	6,42	6,22
$s, c$	15,08	-5,51	-5,45	15,5	39,8	14,35	-6,23	-3,72	11,4	31,3	11,12	6,26	6,107

Коэффициенты потери	$\text{tg } \varphi_{s_{11}}^E$	$\text{tg } \varphi_{s_{12}}^E$	$\text{tg } \varphi_{s_{13}}^E$	$\text{tg } \varphi_{s_{33}}^E$	$\text{tg } \varphi_{s_{44}}^E$	$\text{tg } \varphi_{s_{11}}^D$	$\text{tg } \varphi_{s_{12}}^D$	$\text{tg } \varphi_{s_{13}}^D$	$\text{tg } \varphi_{s_{33}}^D$	$\text{tg } \varphi_{s_{44}}^D$	$\text{tg } \varphi_{c_{11}}^E$	$\text{tg } \varphi_{c_{12}}^E$	$\text{tg } \varphi_{c_{13}}^E$
	$\text{tg } \varphi_{s, c}, \%$	-1,03	-1,13	-0,77	-1,20	-1,57	-0,97	-1,25	-0,2	-0,91	-1,5	1,32	1,52
$Q_{s, c}$	97,1	88,5	130	83	63,7	103	80	500	110	66,7	75,8	65,8	54,9
$\delta (\text{tg } \varphi_{s, c}), \%$	—	9,7	-25	17	52	-5,8	21	-81	-12	46	28	48	77

Продолжение табл. I.11

Действительные части констант	$c_{33}^E$	$c_{44}^E$	$c_{11}^D$	$c_{12}^D$	$c_{13}^D$	$c_{33}^D$	$c_{44}^D$	$c_{12}^E$	$\rho$	$f^*$	$f$ , кгЦ	Источник	
A	$10^{10}$ Н/м <sup>2</sup>	$10^{10}$ Н/м <sup>2</sup>	$10^{10}$ Н/м <sup>2</sup>						$10^3$ кг/м <sup>3</sup>		°С	кгЦ	
s, c	9,3	2,4	11,2	6,4	4,4	12,3	3,9	0,38	7,74	22	—	[122]	
s, c	10,6	2,49	11,2	6,36	5,43	13,2	3,52	0,36	7,33	—	—	[78]	
s, c	10,74	2,52	11,2	6,34	5,72	12,5	3,2	0,37	7,26	20,0	600	•	

Коэффициенты потерь	$\text{tg } \varphi_{c_{33}}^E$	$\text{tg } \varphi_{c_{44}}^E$	$\text{tg } \varphi_{c_{11}}^D$	$\text{tg } \varphi_{c_{12}}^D$	$\text{tg } \varphi_{c_{13}}^D$	$\text{tg } \varphi_{c_{33}}^D$	$\text{tg } \varphi_{c_{44}}^D$	$\rho$	$f^*$	$f$ , кгЦ
$\text{tg } \varphi_{s, c}$ , %	1,62	1,57	1,28	1,44	2,08	1,49	1,5	7,26	20,0	600
$Q_{s, c}$	61,7	63,7	78,1	69,4	48,1	67,1	66,7			
$\delta$ (tg $\varphi_{s, c}$ ), %	57	52	24	40	102	45	46			

Примечания 1.  $s_{ij}^{E, D} = A s; c_{ij}^{E, D} = A c$ ; например,  $s_{11}^E = 15,2 \cdot 10^{-12}$  м<sup>2</sup>/Н. 2.  $\text{tg } \varphi_{s, c} = \left( \frac{s_{ij}''}{s_{ij}} \right) \cdot \left( \frac{c_{ij}''}{c_{ij}} \right)$ ;  $Q_{s, c} = \frac{1}{\text{tg } \varphi_{s, c}}$ ,

где  $s_{ij}^{E, D} = s_{ij}^E; D'; c_{ij}^{E, D} = c_{ij}^E; D'$ ;  $\text{tg } \varphi_{s, c} = \frac{\text{tg } \varphi_{s, c} - \text{tg } \varphi_{s_{11}}^E}{\text{tg } \varphi_{s_{11}}^E} \cdot 100\%$ . 4. \* — результаты получены

Прудько Н. И.

Т а б л и ц а 1.12. Действительные и мнимые части пьезоэлектрических и диэлектрических констант пьезоэрамы ЦТС-19

Действительные части констант	$d_{33}$	$d_{31}$	$d_{15}$	$g_{33}$	$g_{31}$	$g_{15}$	$e_{33}$	$e_{31}$	$e_{15}$	$h_{33}$	$h_{31}$	$h_{15}$	$e_{33}^T/e_0$	$e_{11}^T/e_0$	$e_{11}^S/e_0$	Исходные значения			
$A$	$10^{-12}$ К/Н			$10^{-3}$ В · м/Н			К/м <sup>2</sup>			$10^9$ В/м			—			—			
$d, g, e, h, \epsilon$	304	-125	450	23,1	-9,5	37,6	14,9	-4,9	10,6	20,1	-6,6	14,7	1490	840	1360	820	22	[122]	
$d, g, e, h, \epsilon$	282	-119	380	20,7	-8,73	30,6	15,1	-3,4	9,45	17,8	-4,1	10,8	1540	935	1400	820	—	[78]	
$d, g, e, h, \epsilon$	199	-84	272	20,6	-8,7	31,25	11,12	-2,45	6,85	15,8	-3,48	10,0	1094	795	985	774	20,0	600	*

Коэффициенты потерь	$\text{tg } \varphi_{d_{33}}$	$\text{tg } \varphi_{d_{31}}$	$\text{tg } \varphi_{d_{15}}$	$\text{tg } \varphi_{g_{33}}$	$\text{tg } \varphi_{g_{31}}$	$\text{tg } \varphi_{g_{15}}$	$\text{tg } \varphi_{e_{33}}$	$\text{tg } \varphi_{e_{31}}$	$\text{tg } \varphi_{e_{15}}$	$\text{tg } \varphi_{h_{33}}$	$\text{tg } \varphi_{h_{31}}$	$\text{tg } \varphi_{h_{15}}$	$\text{tg } \varphi_{e_{33}}^S$	$\text{tg } \varphi_{e_{11}}^T$	$\text{tg } \varphi_{e_{11}}^S$	$\text{tg } \varphi_{\epsilon_{11}}^S$	$t, \text{ } ^\circ\text{C}$	$t, \text{ } ^\circ\text{C}$	
$\text{tg } \varphi, \%$	-2,23	-2,30	-2,50	0,24	0,17	0,67	-0,73	-3,4	-0,93	1,42	-1,25	2,17	-2,47	-2,15	-3,17	-3,10	20,0	600	*

Примечания. 1.  $d_{im}, g_{im}, e_{im}, h_{im} = A(d, g, e, h)$ , например  $d_{33} = 304 \cdot 10^{-12}$  К/Н. 2.  $\text{tg } \varphi_{d_{im}} = \frac{d''_{im}}{d'_{im}}$ ;  $\text{tg } \varphi_{g_{im}} = \frac{g''_{im}}{g'_{im}}$ ;  $\text{tg } \varphi_{e_{im}} = \frac{e''_{im}}{e'_{im}}$ ;  $\text{tg } \varphi_{h_{im}} = \frac{h''_{im}}{h'_{im}}$ ;  $\text{tg } \varphi_{\epsilon_{im}} = \frac{\epsilon''_{im}}{\epsilon'_{im}}$ , где  $d_{im} = d'_{im} - jd''_{im}$ ;  $g_{im} = g'_{im} \pm ig''_{im}$ ;  $e_{im} = e'_{im} \pm je''_{im}$ ;  $h_{im} = h'_{im} \pm jh''_{im}$ ;  $\epsilon_{im} = \epsilon'_{im} - j\epsilon''_{im}$ . 3. \* — результаты получены Прудько Н. И.

диссипацию энергии в пьезокерамическом материале. Значения этих коэффициентов для пьезокерамики ЦТС-19 представлены в табл. 1.11 и 1.12. Для сравнения здесь же показаны результаты измерения действительных частей констант, полученные другими авторами.

### § 1.5. Промышленные пьезокерамические материалы. Классификация и численные значения констант

Исторически первым промышленным пьезокерамическим материалом был титанат бария  $BaTiO_3$ . Подобно ему большинство современных пьезокерамик основано на химических соединениях с формулой  $ABO_3$  с кристаллической структурой типа перовскита. Среди них основное применение находит двухкомпонентная пьезокерамика  $PbTiO_3 - PbZrO_3$  (ЦТС) с различными модифицирующими добавками. Разработана также трехкомпонентная пьезокерамика со сложной перовскитовой структурой, состоящая из соединений  $Pb(Mg\ 1/3 Nb\ 2/3)O_3$ ,  $PbTiO_3$  и  $PbZrO_3$  (PCM) [118]. Практический интерес имеют также соединения  $AB_2O_6$ , типичным представителем которых является пьезокерамика  $BaNb_2O_6 - PbNbO_6$ . Подробные сведения о структуре, свойствах, а также технологии изготовления пьезокерамики, приведены в работах [22, 66, 87, 91, 107, 116, 117, 123].

Пьезокерамические материалы классифицируются по двум основным признакам: назначению и электромеханическим свойствам.

По назначению ГОСТ 13927—80 классифицирует пьезокерамические материалы на четыре функциональные группы (табл. 1.13).

По электромеханическим свойствам пьезокерамику подразделяют на сегнетомягкую, средней жесткости и сегнетожесткую [114].

Согласно [117] вследствие небольших различий в химическом составе вариации плотности, химической неоднородности, вариации в технологии синтеза, различий в условиях поляризации значения констант пьезокерамики статистически и систематически флуктуируют как от партии к партии пьезоэлементов, так и внутри данной партии. ГОСТ 13927—80 устанавливает разброс для упругих и диэлектрических констант в пределах  $\pm 20\%$ , для пьезомодулей — минимальные значения. Стандарт Института радиоинженеров США [137] указывает, что константы пьезокерамики определенного состава, имеющей плотность не менее 95% от плотности кристалла, меняются не более чем на  $\pm 5\%$  для упругих,  $\pm 10\%$  для пьезоэлектрических и  $\pm 20\%$  для диэлектрических констант.

В табл. 1.14—1.17 представлены свойства современных промышленных пьезокерамических материалов отечественного производства.

Т а б л и ц а 1.13. Классификация пьезокерамических материалов по назначению (ГОСТ 13927—80)

Марка материала	Основные химические компоненты	Рекомендуемая рабочая температура, °С		Точка Кюри, °С	Функциональные группы		Обозначение
		минимум	максимум		Назначение		
ТБ-1 ЦТСНВ-1	Титанат бария Цирконат-титанат свинца, натрия, висмута	-60	+60	110	Изготовление высокочувствительных пьезокерамических элементов, работающих в режиме приема и излучения		1
ЦТС-19 ТБК-3 ЦТБС-3 НБС-1 ЦТСС-1 ЦТСС-24 ЦТСС-23	Цирконат-титанат свинца Титанат бария-кальция Цирконат-титанат бария-свинца Нюбат бария-свинца Цирконат-титанат свинца Цирконат-титанат свинца Цирконат-титанат свинца	-60 -60 -60 -60 -60 -60 -60	+200 +60 +85 +150 +85 +150 +150	290 105 180 245 260 270 275	Изготовление пьезокерамических элементов, работающих в режиме приема и (или) излучения в условиях воздействия сильных электрических полей и напряжений		2
ТБКС ЦТСС-35 ЦТСС-28 ЦТСС-29 НБС-3 ЦТСС-22	Титанат бария-кальция-свинца Цирконат-титанат свинца Цирконат-титанат свинца Цирконат-титанат свинца Нюбат бария-свинца Цирконат-титанат свинца	-60 -60 -60 -60 -60 -60	+85 +85 +85 +85 +150 +200	150 300 330 250 320	Изготовление пьезокерамических элементов, обладающих повышенной стабильностью частотных характеристик в заданном интервале температур и во времени для частотно-селективных устройств на объемных волнах		3
ЦТСС-21	Цирконат-титанат свинца	-60	+300	400	Изготовление пьезокерамических элементов, работающих при температуре выше 250°С и обладающих повышенной стабильностью пьезоэлектрических характеристик в заданном интервале температур или механических напряжений		4

Таблица 1.14.

Марка пъезокера- мики	Q <sub>м</sub>	s <sup>E</sup> <sub>11</sub>	s <sup>E</sup> <sub>12</sub>	s <sup>E</sup> <sub>13</sub>	s <sup>E</sup> <sub>33</sub>	s <sup>E</sup> <sub>44</sub>	s <sup>D</sup> <sub>11</sub>	s <sup>D</sup> <sub>12</sub>	s <sup>D</sup> <sub>13</sub>	s <sup>D</sup> <sub>33</sub>	s <sup>D</sup> <sub>44</sub>
		10 <sup>-12</sup> м <sup>2</sup> /н					10 <sup>-12</sup> м <sup>2</sup> /н				
ЦТС-19	50	15,2	-5,8	-5,3	16,9	42,6	14,0	-7,0	-2,4	9,9	25,6
	70	15,1	-5,50	-5,62	16,0	40,1	14,2	-6,54	-3,16	10,2	28,4
	50	18,2-11,8									
ЦТВС-3	200	10,7 14,3-11,1	-3,35	-4,3	12,3	34,8	9,7	-4,35	-2,2	7,0	22,0
	70	15,1 17,5-14,1	-4,55	-6,7	17,9	43,8	13,5	-6,65	-3,1	9,8	24,7
ТБҚ-3	300	8,3 9,2-7,7	-2,45	-2,4	8,5	22,5	8,1	-2,65	-1,8	7,0	18,4
ТБКС	440	8,36	-2,20	-2,19	8,58	20,4	8,25	-2,31	-1,77	7,22	17,9
	350	10-8,0									
НБС-1	240	11,60	-3,14	-3,49	12,90	29,0	11,0	-3,67	-2,30	9,06	24,1

Таблица 1.15.

Марка пъезокерамики	d <sub>33</sub>	d <sub>31</sub>	d <sub>15</sub>	g <sub>33</sub>	g <sub>31</sub>	g <sub>15</sub>
	10 <sup>-12</sup> к/н			10 <sup>-3</sup> в м/н		
ЦТС-19	200	-100				
	282	-119	380	20,7	-8,73	30,6
	304	-125	450	23,1	-9,5	37,6
ЦТВС-3	286	-134	540	15,5	-7,2	23,8
	320	-125				
ТБҚ-3	121	-49	206	11,8	-4,7	20,0
	83,3	-43,3				
ТБКС	69,4	-21,2	93,1	19,6	-6,0	22,4
	50,0	-20,0				
НБС-1	214	-79,7	223	17,9	-6,67	20,0

Упругие константы

$c_{11}^E$	$c_{12}^E$	$c_{13}^E$	$c_{33}^E$	$c_{44}^E$	$c_{11}^D$	$c_{12}^D$	$c_{13}^D$	$c_{33}^D$	$c_{44}^D$	$\sigma_{12}^E$	Плотность $\frac{\rho}{10^3 \text{ кг/м}^3}$	Источник
$10^{10} \text{ н.м}^2$					$10^{10} \text{ н/м}^2$							
10,9	6,1	5,4	9,3	2,4	11,2	6,4	4,4	12,3	3,9	0,38	7,74	[122]
11,2	6,42	6,22	10,6	2,49	11,2	6,36	5,43	13,2	3,52	0,36	7,33	[84]
											7,45	[23]
15,1	7,9	8,0	13,6	2,9	15,6	8,4	6,7	16,4	4,5	0,31	7,21	[122]
										0,30	7,20	[23]
11,7	6,7	6,9	10,8	2,3	11,9	6,9	5,9	14,0	4,0	0,30	7,30	[122]
										0,31	7,30	[23]
15,7	6,3	6,2	15,3	4,4	15,8	6,4	5,7	17,1	5,4	0,30	5,40	[122]
											5,30	[23]
14,6	5,18	5,06	14,2	4,90	14,6	5,12	4,83	16,2	5,58	0,26	5,35	[84]
											5,20	[23]
11,0	4,22	4,12	10,0	3,45	11,5	4,71	4,12	13,1	4,15	0,27	5,85	[84]

Пьезоконстанты

$e_{33}$	$e_{31}$	$e_{15}$	$h_{33}$	$h_{31}$	$h_{15}$	Источник
$\text{к/м}^2$			$10^8 \text{ в/м}^2$			
15,1	-3,4	9,45	17,8	-4,1	10,8	[23]
14,9	-4,9	10,6	20,1	-6,6	14,7	[84]
						[122]
17,7	-7,9	15,4	15,6	-7,0	10,8	[122]
						[23]
12,5	-3,2	9,1	14,8	-3,8	10,8	[122]
						[23]
7,71	-0,68	4,56	26,0	-2,3	12,5	[84]
						[23]
14,8	-3,3	7,70	18,0	-2,5	8,3	[84]



Таблица 1.16. Диэлектрические константы

Марка пьезокерамики	$\epsilon_{33}^T/\epsilon_0$	$\epsilon_{33}^S/\epsilon_0$	$\epsilon_{11}^T/\epsilon_0$	$\epsilon_{11}^S/\epsilon_0$	$\text{tg } \delta_{33}^T$ в слабых полях	Удельное объемное электрическое сопротивление $\rho_0$ , Ом·м при $100 \pm 5^\circ\text{C}$ (не менее)	Электрическая прочность $E_{пр}$ ( $E_{пр} \cdot 10^{-6}$ В/м)	Источник
ЦТС-19	1540	935	1400	820	0,025			[84]
	1490	840	1360	820				[122]
ЦТБС-3	$1725 \pm 325$				0,035	$1 \cdot 10^8$	3,0	[23]
	2090	1280	2550	1610				[122]
ЦТСНВ-1	$2300 \pm 500$				0,012 0	$1 \cdot 10^8$	3,0	[23]
	1930	1030	1950	1100				[122]
ТБК-3	$2250 \pm 560$				0,019	$1 \cdot 10^8$	2,9	[23]
	1160	950	1160	950				[122]
ТБКС	$1200 \pm 200$				0,020 0	$1 \cdot 10^7$	3,0	[23]
	400	336	447	410	0,009			[84]
НБС-1	$450 \pm 50$				0,02	$1 \cdot 10^8$	3,0	[23]
	1350	890	1260	900	0,008			[84]
ТБ-1	$1600 \pm 300$				0,020	$1 \cdot 10^9$	3,5	[23]
	$1500 \pm 300$				0,020	$1 \cdot 10^6$	3,0	[23]
ЦТС-23	$1075 \pm 225$				0,007 5	$5 \cdot 10^8$	3,0	[23]
ЦТС-24	$1075 \pm 225$				0,007 5	$1 \cdot 10^8$	3,0	[23]
ЦТС-22	$800 \pm 200$				0,025	$1 \cdot 10^7$	3,0	[23]
НБС-3	$1800 \pm 400$				0,02	$1 \cdot 10^8$	4,5	[23]
ЦТС-35	$1000 \pm 200$				0,025	$2 \cdot 10^8$	4,5	[23]
ЦТС-21	$550 \pm 150$				0,025	$1 \cdot 10^9$	4,0	[23]
ЦТСС <sub>T</sub> -1	$1150 \pm 150$				0,005	$5 \cdot 10^6$	—	[23]

Примечание.  $\epsilon_0 = (4\pi \cdot 9 \cdot 10^9)^{-1}$  ф/м =  $8,84194 \cdot 10^{-12}$  ф/м;  
 $\text{tg } \delta_{33}^T = \epsilon_{33}^{T''}/\epsilon_{33}^{T'}$ .

Таблица 1.17. Коэффициенты электромеханической связи

Марка пьезокерамики	$k_{31}$	$k_{33}$	$k_p$	$k_t$	$k_{13}$	$k_{24} = -k_{15} = k_{11}$	$k'_{33}$	$k'_t$	Источник
ЦТС-19	-0,28	0,64		0,49		0,63		-0,172	[122]
	-0,262	0,605	-0,473	0,44	0,615	0,54	0,565		[84]
ЦТБС-3			-0,40					-0,191	[23]
	-0,30	0,60	-0,45	0,41		0,61			[122]
ЦТСНВ-1			-0,45					-0,146	[23]
	-0,33	0,67	-0,45	0,48		0,66			[122]
ТБК-3			-0,20					-0,088	[23]
	-0,17	0,41	-0,193	0,33		0,43			[122]
ТБКС			-0,17					-0,033	[23]
	-0,117	0,398	-0,361	0,35	0,399	0,32	0,382		[84]
НБС-1			-0,28					-0,112	[23]
	-0,214	0,544	-0,28	0,45	0,546	0,41			[84]

**§ 2.1. Основные геометрические типы пьезокерамических элементов (ПКЭ)**

Геометрическая форма ПКЭ диктуется условиями их применения. При использовании ПКЭ в качестве образцов для определения констант пьезокерамических материалов или резонансных пьезопреобразователей геометрическая форма и соотношение размеров элементов выбираются из условий возникновения одномерных линейных или планарных нормальных колебаний. При этом типы нормальных колебаний, которые для ПКЭ зависят также от взаимной ориентации оси поляризации, электрического поля и колебательного смещения, называют модами колебаний.

При использовании ПКЭ в качестве широкополосных преобразователей или составной части многоэлементного преобразователя форма и соотношение размеров ПКЭ обычно не отвечают условиям работы на одномерных линейных или планарных модах колебаний. Такие ПКЭ имеют в сравнительно узком диапазоне частот связанные моды колебаний, анализ которых представляет большие теоретические трудности.

В настоящей главе приведены основные геометрические типы ПКЭ, а также соотношение их размеров, позволяющее выделить одномерную линейную или планарную моду колебаний.

ПКЭ можно классифицировать по трем основным признакам, которые оказывают наибольшее влияние на описание их работы: геометрическая форма; взаимная ориентация возбуждающего электрического поля и возникающего колебательного смещения; отношение резонансного размера ПКЭ к другим размерам.

По геометрической форме различают две основные группы ПКЭ: 1) прямоугольные параллелепипеды; 2) тела вращения. Прочие ПКЭ относятся к элементам специальной формы: например, трапециевидальные стержни, треугольные пластины и т. п. (рис. 2.1).

По взаимной ориентации электрического поля и колебательного смещения, определяющей электрические граничные условия в направлении колебаний, выделяют моды колебаний, в которых электрическое поле поперечно направлению колебаний (пьезоэлектрически мягкие) или совпадает с ним (пьезоэлектрически жесткие) [147].

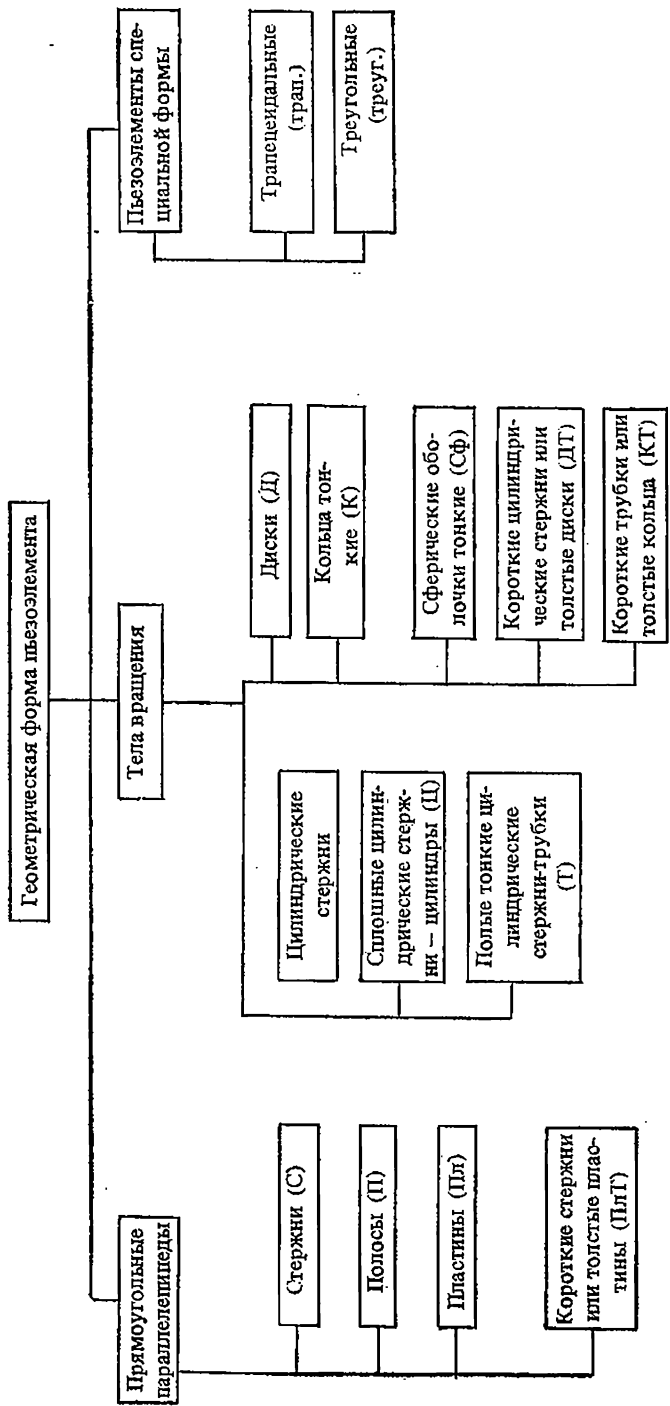


Рис. 2.1. Классификация ПКЭ по геометрической форме.

Таблица 2.1. Классификация одномерных мод колебаний пьезоэлементов

Пьезомягкие моды	
Прямоугольные параллелепипеды	Тела вращения
<p><math>CH_t</math> <span style="float: right;"><math>l</math></span></p> <p><math>l \gg t, W</math></p>	<p><math>DN_t</math> <span style="float: right;"><math>d</math></span></p>
<p><math>Pl \ast III_t</math> <span style="float: right;"><math>l=W</math></span></p> <p><math>l = W \gg t</math></p>	<p><math>TH_0</math> <span style="float: right;"><math>d \gg t</math></span></p> <p>Радиальная поляризация</p> <p><math>l &gt; d \gg t</math></p>
<p><math>PlKIV_t</math> <span style="float: right;"><math>l=W</math></span></p> <p><math>l = W \gg t</math></p>	<p><math>KH_t</math> <span style="float: right;"><math>d</math></span></p> <p><math>d \gg t, W</math></p>
	<p><math>KH_p</math> <span style="float: right;"><math>d</math></span></p> <p>Радиальная поляризация</p> <p><math>d \gg t, W</math></p>
	<p><math>CF_p</math> <span style="float: right;"><math>d</math></span></p> <p>Радиальная поляризация</p> <p>Радиальное смещение</p> <p><math>d \gg t</math></p>

Низкочастотные моды

Пьезомягкие моды	
Прямоугольные параллелепипеды	Тела вращения
<p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">Среднечастотные моды</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p><math>ПС_t-1</math></p> </div> <div style="text-align: center;"> <p><math>1Ср</math></p> <p>Радиальная поляризация</p> <p><math>l \gg d \gg t</math></p> </div> </div>
<p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">Среднечастотные моды</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p><math>ПС_t-2</math></p> </div> </div>
<p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">Высокочастотные моды</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p><math>ПВ_t</math></p> </div> <div style="text-align: center;"> <p><math>1В_t</math></p> <p><math>d \ll l</math></p> </div> </div>
<p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">Высокочастотные моды</p>	<p><math>КВ_t</math></p> <p>Радиальная поляризация</p> <p><math>t \ll d, W</math></p>

Примечание.  $СН_t$ ,  $ДН_t$ ,  $ПлКН_t$  и т. д. — обозначения мод колебаний;  $l$ ,  $l = W$ ,  $d$ ,  $t$  и т. д. — размеры, определяющие резонансную частоту соответствующей моды; — — — направления смещения; → направление поляризации; /// поверхности, покрытые электродами

Т а б л и ц а 2.2. Классификация одномерных мод колебаний пьезоэлементов

		Пьезомягкие моды	
		Прямоугольные параллелепипеды	Тела вращения
Низкочастотные моды	<p>СНр</p> <p><math>l \gg t, W</math></p>	<p>ЦНр</p> <p><math>d \ll l</math></p>	
	<p>ПСр</p> <p><math>l &gt; W &gt; t</math></p>		
Высокочастотные моды	<p>ПнВр</p> <p><math>t \ll W \ll l</math></p>	<p>КВр</p> <p><math>t \ll W, d</math></p>	
	<p>ПнСВр</p> <p><math>t \ll l; W - \text{произвольно}</math></p>	<p>ДВр</p> <p><math>t \ll d</math></p>	

Примечание. Обозначения те же, что и в табл. 2.1.

Механические граничные условия для одномерных или планарных мод колебаний формулируются в зависимости от того, какой размер определяет резонансную частоту: наибольший или наименьший. Моды колебаний в этом случае разделяют на низко- и высокочастотные [124], промежуточные — можно выделить как среднечастотные. Резонансный размер в последнем случае занимает промежуточное значение между остальными двумя.

В табл. 2.1—2.2, построенных с использованием [147], приведены основные типы ПКЭ и указаны направления колебательного смещения, характерного для той или иной одномерной линейной или планарной моды колебаний. (Исключение составляют моды  $KN_p$ ,  $SФ_p$ , и  $ТС_p$ , в которых электрическое поле совпадает с направлением колебаний, однако, вследствие приближений теории тонких оболочек по математическому описанию эти моды аналогичны модам с поперечным полем. При несоблюдении приближений эти моды рассматривают как пьезоэлектрически жесткие.

В табл. 2.1—2.2 приняты следующие обозначения: первые буквы в обозначении моды соответствуют наименованию геометрической формы ПКЭ, приведенного на рис. 2.1; вторые — механическим граничным условиям: Н, С, В — низко-, средне- и высокочастотные моды соответственно; индексы « $t$ » (transverse) или « $p$ » (parallel) указывают на электрические граничные условия (поперечное или параллельное колебательному смещению направление электрического поля); «КIII» и «КIV» — контурные моды III и IV квадратных пластин, например, « $CH_t$ » — стержень, низкочастотная мода с электрическим полем, поперечным колебательному смещению, « $PlV_p$ » — пластина, высокочастотная мода с полем, параллельным смещению, и т. д.

## § 2.2. Одномерные линейные и планарные моды колебаний ПКЭ

Схема решения электромеханической задачи для одномерных линейных мод колебаний. 1. *Выбор независимых переменных.* Для описания состояния элементарного объема в решении рассматриваемой задачи можно использовать любое уравнение состояния пьезоэлектрической среды, приведенное в табл. 1.2.

Выбор независимых механических переменных ( $T$  или  $S$ ) определяется механическими условиями в направлениях, поперечных колебательному движению. В случае низкочастотных мод элементарный объем считается свободным ( $T = 0$ ) в поперечном направлении, и в качестве независимой механической переменной выбирают  $T$ . На высокочастотных модах элементарный объем зажат ( $S = 0$ ) в поперечном направлении, и независимой механической переменной является  $S$ .

Для выбора независимых электрических переменных ( $E$  и  $D$ ) оценивают электрические граничные условия в направ-

лениях одномерного линейного или планарного колебательного движения. Электрические граничные условия определяются расположением поверхностей электродов и формой тела. Для пьезоэлектрических мягких (пьезомягких) мод поверхности электродов параллельны направлению колебаний:  $E_1 = E_2 = 0$  и  $dE_3/dx_1 = 0$ . Независимой электрической переменной целесообразно выбрать  $E$ . Входящая в этом случае в соответствующие уравнения состояния упругая константа с индексом  $E$  свободна от дополнительного вклада, связанного с влиянием пьезоэффекта, при этом  $c^E < c^D$ . Отсюда ясно, почему моды с  $E$  поперечным колебаниям можно назвать пьезомягкими. Поскольку для пьезомягких мод мгновенное значение  $E_3$  не зависит от распределения механического смещения, последнее будет определять мгновенное распределение индукции  $D_3$  в направлении колебаний. Поэтому для подобных мод более корректной является постановка задачи определения тока через ПКЭ и его комплексной проводимости. Для пьезоэлектрически жестких (пьезожестких) мод  $(dD_3)/(dx_3) = 0$  и  $D_1 = D_2 = 0$ , что определяет выбор в качестве независимой переменной  $D$ . Следовательно, для таких мод ставится задача определения напряжения на колеблющемся ПКЭ и его комплексного сопротивления.

**Примеры:**

Мода  $CH_t$  | Мода  $CH_p$

Обе моды — низкочастотные, поперечные размеры ПКЭ значительно меньше резонансного. Независимая механическая переменная —  $T$ .

Пьезоэлектрически мягкая мода — независимая электрическая переменная —  $E$  | Пьезоэлектрически жесткая мода — независимая электрическая переменная —  $D$

Результаты выбора независимых переменных

$TE$  |  $TD$

Уравнения состояния

$$\begin{array}{l|l} S = s^D T + dE & S = s^D T + gD \\ D = dT + \epsilon^T E & E = -gT + \beta^T D. \end{array}$$

2. *Конкретизация уравнений состояния.* На этом этапе анализируются отличные от нуля компоненты механических и электрических воздействий на элементарный объем. Для одномерных линейных или планарных мод соотношение размеров выбирают таким образом, чтобы граничные электрические или механические условия были справедливы для всего объема. Например, для мод  $CH_t$  и  $CH_p$  на первом этапе определено, что стержни свободны в поперечном направлении:  $T_2 = T_3 = T_4 = T_5 = T_6 = 0$  и  $T_1 = T_2 = T_4 = T_5 = T_6 = 0$  соответственно, и ввиду малости поперечных размеров это условие применимо ко всему объему. Аналогично для электрических граничных усло-



вий соответственно  $E_1 = E_2 = 0$  и  $D_1 = D_2 = 0$  и по тем же причинам это условие справедливо для всего объема ПКЭ.

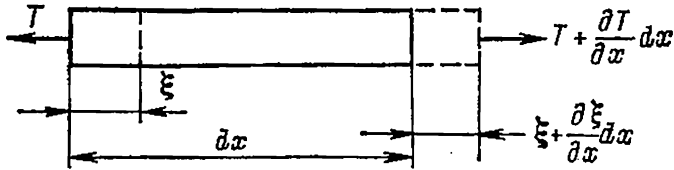


Рис. 2.2. Элементарный объем в одномерном приближении.

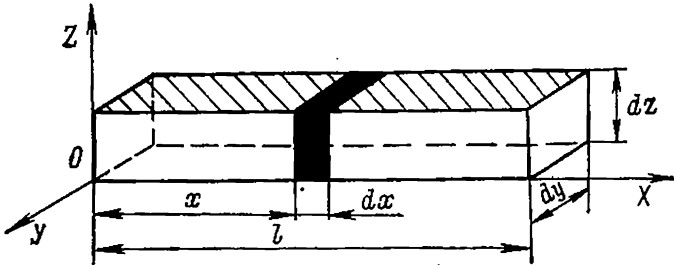


Рис. 2.3. Элементарный объем для моды  $SH_1$ .

Таким образом, уравнения состояния, т. е. местные уравнения пьезоэффекта, принимают вид для моды  $SH_t$

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= s_{11}^E T_1 + d_{31} E_3; \\ D_3 &= d_{31} T_1 + \epsilon_{33}^T E_3. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

для моды  $SH_p$

$$\left. \begin{aligned} S_3 &= s_{33}^D T_3 + g_{33} D_3; \\ E_3 &= -g_{33} T_3 + \beta_{33}^T D_3. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

3. Составление уравнений движения. Деформация элементарного объема (рис. 2.2)

$$S = \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (2.3)$$

Упругая сила, действующая на элементарный объем с нормальным сечением  $dy dz$  (рис. 2.3)

$$F = \frac{\partial T}{\partial x} dx dy dz. \quad (2.4)$$

Пренебрегая внутренними потерями и приравнявая (2.4) силе инерции  $\rho dx dy dz (\partial^2 \xi / \partial t^2)$ , получаем уравнение движения в виде

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (2.5)$$

где  $\rho$  — плотность пьезокерамики.

4. Дифференциальное уравнение для смещения элементарного объема. Уравнение получают, подставляя в (2.5) значение механического напряжения из уравнений состояния для моды  $CH_t$

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = \frac{1}{s_{11}^E} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1^2}; \quad (2.6)$$

для моды  $CH_p$

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial t^2} = \frac{1}{s_{33}^D} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_3^2}. \quad (2.7)$$

Уравнения (2.6) и (2.7) аналогичны чисто механическим волновым уравнениям с соответствующими модулем упругости или скоростью звука:

$$v_b^E = (\rho s_{11}^E)^{-\frac{1}{2}}; \quad (2.8)$$

$$v_b^D = (\rho s_{11}^D)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.9)$$

5. Решение дифференциального уравнения. Решения (2.6) и (2.7) для случая  $E_3 = E_0 e^{j\omega t}$  или  $D_3 = D_0 e^{j\omega t}$  имеют вид: для моды  $CH_t$

$$\xi_1 = \left[ A \sin \frac{\omega x_1}{v_b^E} + B \cos \frac{\omega x_1}{v_b^E} \right] e^{j\omega t}; \quad (2.10)$$

для моды  $CH_p$

$$\xi_3 = \left[ A \sin \frac{\omega x_3}{v_b^D} + B \cos \frac{\omega x_3}{v_b^D} \right] e^{j\omega t}, \quad (2.11)$$

где постоянные  $A$  и  $B$  определяются из условий равенства нулю механического напряжения на концах ПКЭ:

для моды  $CH_t$

$$A = \frac{v_b^E d_{31}}{\omega} E_0; \quad (2.12)$$

$$B = \frac{v_b^E d_{31}}{\omega} \frac{\left( \cos \frac{\omega l}{v_b^E} - 1 \right)}{\sin \frac{\omega l}{v_b^E}} E_0; \quad (2.13)$$

для моды  $CH_p$

$$A = \frac{v_b^D g_{33}}{\omega} D_0; \quad (2.14)$$

$$B = \frac{v_b^D g_{33}}{\omega} \frac{\cos \left( \frac{\omega l}{v_b^D} - 1 \right)}{\sin \frac{\omega l}{v_b^D}} D_0. \quad (2.15)$$

С учетом (2.12)—(2.15) решения электромеханической задачи для распределения смещений в колеблющемся ПКЭ имеют вид

для моды  $CH_t$

$$\xi_1 = \frac{d_{31}v_b^E}{\omega} \left[ \sin \frac{\omega x_1}{v_b^E} - \operatorname{tg} \frac{\omega l}{2v_b^E} \cos \frac{\omega x_1}{v_b^E} \right] E_0 e^{j\omega t}; \quad (2.16)$$

для моды  $CH_p$

$$\xi_3 = \frac{g_{33}v_b^D}{\omega} \left[ \sin \frac{\omega x_3}{v_b^D} - \operatorname{tg} \frac{\omega l}{2v_b^D} \cos \frac{\omega x_3}{v_b^D} \right] D_0 e^{j\omega t}. \quad (2.17)$$

6. *Решение электромеханической задачи для тока или напряжения на ПКЭ.* Электрические граничные условия определяют постоянно одной из электрических переменных в направлении колебаний. В случае пьезомягких мод это будет напряженность электрического поля. Поэтому здесь ставится задача определения тока. Для моды  $CH_t$ , например, ток через поверхность электрода

$$I = \oint \frac{dD_3}{dt} dS = w \int_0^l \frac{dD_3}{dt} dx_1. \quad (2.18)$$

При известном решении для смещения (2.16) из уравнений состояния получают распределение индукции по длине стержня

$$D_3 = \left( \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E} P - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E} + \varepsilon_{33}^T \right) E_3; \quad (2.19)$$

где

$$P = \cos \frac{\omega x_1}{v_b^E} + \operatorname{tg} \frac{\omega l}{2v_b^E} \sin \frac{\omega x_1}{v_b^E}. \quad (2.20)$$

Подстановка (2.19) в (2.18) с учетом  $(\partial D_3)/(\partial t) = j\omega D_3$  дает

$$I = j\omega w \left[ \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E} \frac{2v_b^E}{\omega} \operatorname{tg} \frac{\omega l}{2v_b^E} + \left( \varepsilon_{33}^T - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E} \right) l \right] E_3. \quad (2.21)$$

Используя определение коэффициента связи  $k_{31}^2 = (d_{31}^2)/(\varepsilon_{33}^T s_{11}^E)$ , перепишем (2.21)

$$I = \left[ j\omega w l \varepsilon_{33}^T k_{31}^2 \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\varphi} + j\omega w l \varepsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \right] E_3, \quad (2.22)$$

где  $\varphi = (\omega l)/(2v_b^E)$ .

Для пьезожестких мод, где в направлении колебаний постоянна электрическая индукция, ставится задача определения решения для напряжения на ПКЭ. Для моды  $CH_p$ , поступая аналогично приведенному выше примеру, получаем для напря-

жения между электродами

$$U = - \int_0^l E_3 dz = \left[ - \frac{g_{33}^2}{s_{33}^D} \frac{2v_b^D}{\omega} \operatorname{tg} \frac{\omega l}{2v_b^D} + \left( \beta_{33}^T + \frac{g_{33}^2}{s_{33}^D} \right) l \right] D_3. \quad (2.23)$$

Используя  $k_{33}^2 = (g_{33}^2)/(s_{33}^E \beta_{33}^T)$ , перепишем (2.23)

$$U = \left[ \frac{\beta_{33}^T}{1 - k_{33}^2} l - \frac{k_{33}^2}{1 - k_{33}^2} \beta_{33}^T l \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\varphi} \right] D_3, \quad (2.24)$$

где  $\varphi = \omega l / 2v_b^D$ .

7. Решение электромеханической задачи для комплексной проводимости (адмитанса) или сопротивление (импеданса) ПКЭ. Для пьезомягких мод, например  $CH_t$ , определяется комплексной проводимостью ПКЭ

$$Y = j\omega \frac{\omega l}{t} \epsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) + j\omega \frac{\omega l \epsilon_{33}^T}{t} k_{31}^2 \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\varphi}. \quad (2.25)$$

Для пьезожестких мод, например  $CH_p$ , определяется импеданс ПКЭ

$$z = \frac{i\beta_{33}^T}{j\omega t (1 - k_{33}^2)} - \frac{i\beta_{33}^T k_{33}^2}{j\omega t (1 - k_{33}^2)} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\varphi}. \quad (2.26)$$

Решение электромеханической задачи для одномерных планарных мод колебаний с радиальным распределением смещения. Для описания колебаний мод тел вращения  $DH_t$ ,  $ЦВ_t$  или мод  $КН_p$ ,  $КН_t$ ,  $ТС_p$ , у которых учитывается радиальное распределение смещений по ширине, удобно применять цилиндрическую систему координат (рис. 2.4), в которой положение точки в пространстве характеризуется радиус-вектором  $r$ , углом  $\theta$  и высотой  $z$ .

Решение задачи покажем на примере планарной моды диска  $DH_t$  [144].

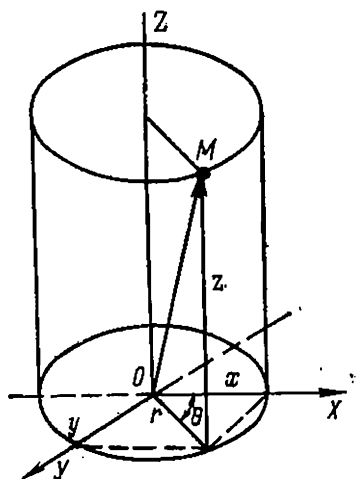


Рис. 2.4. Цилиндрическая система координат

1. Выбор независимых переменных. Для пьезомягкой низкочастотной моды  $DH_t$  независимыми переменными являются  $T$  и  $E$ , а уравнения состояния

$$\left. \begin{aligned} S &= s^E T + dE; \\ D &= dT + \epsilon^T E. \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

2. Конкретизация уравнений состояния. Для моды ДН<sub>1</sub> местные уравнения пьезоэффекта имеют вид

$$\left. \begin{aligned} S_{rr} &= s_{11}^E T_{rr} + s_{12}^E T_{\theta\theta} + d_{31} E_z; \\ S_{\theta\theta} &= s_{12}^E T_{rr} + s_{11}^E T_{\theta\theta} + d_{31} E_z; \\ D_z &= d_{31} (T_{rr} + T_{\theta\theta}) + \varepsilon_{33}^T E_z. \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

3. Составление уравнения движения. Учитывая в уравнениях Ньютона, преобразованных в цилиндрической системе координат, условия  $T_{zz} = T_{r\theta} = T_{rz} = T_{\theta z} = 0$  и  $\xi_\theta = 0$ , получаем одномерное уравнение движения

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \left( \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} \right). \quad (2.29)$$

4. Дифференциальное уравнение для смещения. Уравнение получают подстановкой в (2.29)  $T_{rr}$  и  $T_{\theta\theta}$  через  $S_{rr}$  и  $S_{\theta\theta}$  из (2.28)

$$\frac{1}{s_{11}^E (1 - \sigma^2)} \left( \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \xi_r \right) = - \omega^2 \rho \xi_r, \quad (2.30)$$

где  $\sigma = -s_{12}^E/s_{11}^E$  — коэффициент Пуассона;  $\xi_r = \xi_r e^{j\omega t}$ .

Уравнение (2.30) можно преобразовать к виду

$$r^2 \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial r^2} + r \frac{\partial \xi_r}{\partial r} + \left( \frac{r^2 \omega^2}{v^2} - 1 \right) \xi_r = 0, \quad (2.31)$$

где  $v = [\rho s_{11}^E (1 - \sigma^2)]^{-1/2}$  — скорость распространения колебаний.

5. Решение дифференциального уравнения. Уравнение (2.31) аналогично чисто механическому уравнению колебаний, решение которого записывается в виде

$$\xi_r = A J_1 \left( \frac{\omega r}{v} \right) e^{j\omega t}, \quad (2.32)$$

где  $J_1(\omega r/v)$  — функция Бесселя первого рода первого порядка;  $A$  — постоянная интегрирования.

Учитывая, что на границах ( $r = a$ ) свободно колеблющегося диска  $T_{rr} = 0$ , имеем

$$A = \frac{d_{31} E_0 (1 + \sigma)}{P_a}, \quad (2.33)$$

где

$$P_a = \frac{\omega}{v} J_0 \left( \frac{\omega a}{v} \right) - \frac{1 - \sigma}{a} J_1 \left( \frac{\omega a}{v} \right).$$

Подстановка (2.33) в (2.32) дает

$$\xi_r = \frac{d_{31} (1 + \sigma)}{P_a} J_1 \left( \frac{\omega r}{v} \right) E_0 e^{j\omega t}. \quad (2.34)$$

6. Решение для тока. Для моды ДН<sub>1</sub>

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \frac{\partial D_z}{\partial t} r dr. \quad (2.35)$$

Распределение  $D_z$  получают из уравнений состояния с учетом решения (2.34) для смещения

$$D_z = \left[ \varepsilon_{33}^T - \frac{2d_{31}^2}{s_{11}^E (1 - \sigma)} \right] E_z + \frac{d_{31}^2 (1 + \sigma)}{s_{11}^E (1 - \sigma) P_u} \frac{\omega}{v} J_0 \left( \frac{\omega r}{v} \right) E_z. \quad (2.36)$$

Подстановка (2.36) в (2.35) и интегрирование дают

$$I = \left[ j\omega \pi a^2 \varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2) + j\omega \pi a^2 \varepsilon_{33}^T k_p^2 \times \right. \\ \left. \times \frac{(1 + \sigma) J_1 \left( \frac{\omega a}{v} \right)}{\left( \frac{\omega a}{v} \right) J_0 \left( \frac{\omega a}{v} \right) - (1 - \sigma) J_1 \left( \frac{\omega a}{v} \right)} \right] E_z, \quad (2.37)$$

где  $k_p^2 = 2d_{31}^2 / [(s_{11}^E (1 - \sigma) \varepsilon_{33}^T)]$  — планарный коэффициент связи материала.

7. Решение для комплексной проводимости. Используя (2.37), получим

$$Y = j\omega \frac{\pi a^2}{t} \varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2) + j\omega \frac{\pi a^2}{t} \varepsilon_{33}^T k_p^2 \frac{(1 + \sigma) J_1(\varphi)}{\varphi J_0(\varphi) - (1 - \sigma) J_1(\varphi)}, \quad (2.38)$$

где  $\varphi = \omega a/v$ .

Сравнение (2.38) и (2.25) показывает, что выражения для комплексной проводимости пьезомягких мод имеют идентичный вид, отличаясь коэффициентом связи и функцией, описывающей механическую сторону ПКЭ.

**Сводная таблица решений электромеханической задачи для одномерных мод колебаний ПКЭ.** Известные решения рассматриваемой задачи представлены в табл. 2.3. В ней отражены основные моменты приведенной схемы решения электромеханической задачи, указаны описывающие соответствующую моду константы пьезокерамики, коэффициент электромеханической связи материала ( $k_{im}$ ) и скорость звука ( $v$ ). Обозначения мод колебаний соответствуют обозначениям, приведенным в § 2.1.

Известны [147] решения для мод  $PV_t$  и  $ЦV_t$  при выборе в качестве независимых переменных  $E_m$  и  $T_t$ . В то же время использование принципов классификации, приведенных в настоящей главе, показывает, что более удобным является выбор в качестве независимых переменных  $E_m$  и  $S_j$ . В этом случае вид решения значительно упрощается. Можно показать, в частности, для моды  $PV_t$

$$k_{31}^{\prime\prime 2} = k_t^{\prime 2} = \frac{e_{31}^2}{\varepsilon_{33}^S C_{11}^D} \quad (2.39)$$

и

$$\varepsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2) (1 - k_p^{\prime 2}) = \varepsilon_{33}^S. \quad (2.40)$$

Таким образом, в табл. 2.3 наряду с известным для указанных мод показано также решение, полученное автором настоя-

Таблица 2.3. Основные этапы и вид решения электромеханической задачи для комплексной проводимости пьезомягких и комплексного сопротивления пьезожестких мод колебаний ПКЭ

Мода	Независимые переменные и уравнения состояния	Отличные от нуля независимые переменные	
		Электрические	Механические
<b>1. Пьезомягкие моды</b>			
1.1. Низкочастотные			
CH <sub>t</sub>	$E, T$ $S_i = s_{ij}^E T_j + d_{mi} E_m$ $D_m = d_{mi}^t T_i + e_{mk}^T E_k$	E <sub>3</sub>	T <sub>1</sub>
KH <sub>t</sub>			T <sub>1</sub> = T <sub>2</sub> = T <sub>c</sub>
KH <sub>p</sub>			T <sub>rr</sub> (T <sub>1</sub> ); T <sub>θθ</sub> (T <sub>2</sub> )
СФ <sub>p</sub>			T <sub>1</sub> ; T <sub>2</sub>
ДН <sub>t</sub>			T <sub>1</sub> ; T <sub>3</sub>
ПС <sub>t</sub> - 1			
ПС <sub>t</sub> - 2			
1.2. Высокочастотные			
ПВ <sub>t</sub>	$E, S$ $T_i = c_{ij}^E S_j - e_{mi} E_m$ $D_m = e_{mi}^t S_i + e_{mk}^s E_k$	E <sub>3</sub>	S <sub>1</sub>
ЦВ <sub>t</sub>			S <sub>1</sub> = S <sub>2</sub>
ПВ <sub>t</sub>	$E, T$ $S_i = s_{ij}^E T_j + d_{mi} E_m$ $D_m = d_{mi}^t T_i + e_{mk}^T E_k$	E <sub>3</sub>	T <sub>1</sub> ; T <sub>2</sub> ; T <sub>3</sub>
ЦВ <sub>t</sub>			T <sub>1</sub> = T <sub>2</sub> ; T <sub>3</sub>
<b>2. Пьезожесткие моды</b>			
2.1. Низкочастотные			
CH <sub>p</sub>	$D, T$ $S_i = s_{ij}^D T_j + g_{mi} D_m$ $E_m = -g_{mi}^t T_i + \beta_{mk}^T D_k$	D <sub>3</sub>	T <sub>3</sub>
ЦН <sub>p</sub>			T <sub>1</sub> , T <sub>3</sub>
ПС <sub>p</sub>			

Мода	Независимые переменные и уравнение состояния			Отличные от нуля независимые переменные	
				Электрические	Механические
2.2. Высокочастотные					
ПлВ <sub>p</sub>	$D, S$ $T_i = c_{ij}^D S_j - h_{mi} D_m$ $E_m = -h_{mi}^t S_i + \beta_{mk}^S D_k$			$D_3$	$S_3$
ДВ <sub>p</sub>				$D_1$	$S_5$
ПлСВ <sub>p</sub>					
Мода	Константы материала			Решение дифференциального уравнения	
	упругие	диэлектрические	пьезоэлектрические	Комплексная проводимость $Y$	
1. Пьезомягкие моды					
1.1. Низкочастотные					
CH <sub>t</sub>	$s_{11}^E$	$\epsilon_{33}^T$	$d_{31}$	$Y = \frac{j\omega l w}{t} \epsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \left[ 1 + \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{\operatorname{tg}(\omega l / 2v_b^E)}{\omega l / 2v_b^E} \right]$	
КН <sub>t</sub>				$Y = \frac{j\omega 2\pi a w}{t} \epsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \left[ 1 + \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right]$	
КН <sub>p</sub>					
СФ <sub>p</sub>				$Y = \frac{j\omega 4\pi a^2}{t} \epsilon_{33}^T (1 - k_p^2) \left[ 1 + \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right]$	



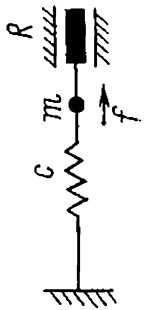
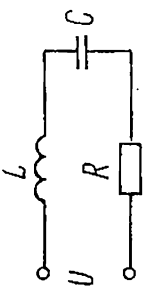
Мода	Константы материала			Решение дифференциального уравнения
	упругие	диэлектрические	пьезоэлектрические	Комплексная проводимость $Y$
ДН <sub>t</sub>	$s_{11}^E$ $s_{12}^E$	$\epsilon_{33}^T$	$d_{31}$	$Y = \frac{j\omega\pi R^2}{l} \epsilon_{33}^T (1 - k_p^2) \left[ 1 + \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{(1 + \sigma) J_1 \left( \frac{\omega R}{v} \right)}{\frac{\omega R}{v} J_0 \left( \frac{\omega R}{v} \right) - (1 - \sigma) J_1 \left( \frac{\omega R}{v} \right)} \right]$
ПС <sub>t</sub> -1				$Y = \frac{j\omega l \omega}{l} \epsilon_{33}^T (1 - k_p^2) \left[ 1 + \frac{(k'_{31})^2}{1 - (k'_{31})^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{\text{tg}(\omega\omega/2v)}{\omega\omega/2v} \right]$
ПС <sub>t</sub> -2	$s_{11}^E$ ; $s_{13}^E$ ; $s_{33}^E$		$d_{31}$ $p_{33}$	$Y = \frac{j\omega\omega t}{l} \epsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2) (1 - k_{31}^2) \left[ 1 + \right. \\ \left. + \frac{k_{31}^{\prime 2}}{(1 - k_{31}^{\prime 2})} \cdot \frac{(\text{tg} \omega\omega/2v)}{\omega\omega/2v} \right]$
1.2. Высокочастотные				
ПВ <sub>t</sub>				$Y = \frac{j\omega\omega t}{l} \epsilon_{33}^S \left[ 1 + \frac{k_t^{\prime 2}}{1 - k_t^{\prime 2}} \cdot \frac{\text{tg}(\omega t/2v)}{\omega t/2v} \right]$
ЦВ <sub>t</sub>	$c_{11}^E$	$\epsilon_{33}^S$	$e_{31}$	$Y = \frac{j\omega\pi R^2}{l} \epsilon_{33}^S \left[ 1 + \frac{k_p^{\prime 2}}{1 - k_p^{\prime 2}} \times \right. \\ \left. \times \frac{(1 + \sigma') J_1 \left( \frac{\omega R}{v} \right)}{\frac{\omega R}{v} J_0 \left( \frac{\omega R}{v} \right) - \sqrt{1 - \sigma'} J_1 \left( \frac{\omega R}{v} \right)} \right]$

Мода	Константы материала			Решение дифференциального уравнения
	Упругая	Диэлектрическая	Пьезоэлектрические	Комплексная проводимость
ПВ <sub>t</sub>	$s_{11}^E$ ; $s_{12}^E$ ; $s_{13}^E$ ; $s_{33}^E$	$\epsilon_{33}^T$	$d_{31}$ ; $d_{33}$	$Y = \frac{j\omega t}{l} \epsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2) (1 - k_p'^2) \times$ $\times \left[ 1 + \frac{k_{31}'^2}{1 - k_{31}'^2} \cdot \frac{\text{tg}(\omega t/2v)}{\omega t/2v} \right]$
ЦВ <sub>t</sub>				$Y = \frac{j\omega \pi R^2}{l} \epsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2) (1 - k_p'^2) \left[ 1 + \frac{k_p'^2}{1 - k_p'^2} \times \right.$ $\left. \times \frac{(1 + \sigma') J_1\left(\frac{\omega R}{v}\right)}{\frac{\omega R}{v} J_0\left(\frac{\omega R}{v}\right) - \sqrt{1 - \sigma'} J_1\left(\frac{\omega R}{v}\right)} \right]$
Мода	Константы материала			Решение дифференциального уравнения
	Упругие	Диэлектрические	Пьезоэлектрические	Комплексное сопротивление Z
<b>2. Пьезоэлектрические моды</b>				
<b>2.1. Низкочастотные</b>				
СН <sub>p</sub>	$s_{33}^D$	$\beta_{33}^T$	$g_{33}$	$Z = \frac{l}{j\omega t \epsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2)} \left[ 1 - k_{33}^2 \frac{\text{tg}[\omega l/(2v)]}{\omega l/2v} \right]$
ЦН <sub>p</sub>				$Z = \frac{l}{j\omega \pi R^2 \epsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2)} \left[ 1 - k_{33}^2 \frac{\text{tg}(\omega l/2v)}{\omega l/2v} \right]$
ПС <sub>p</sub>	$s_{11}^D$ ; $s_{13}^D$ ; $s_{33}^D$		$g_{33}$ $g_{31}$	$Z = \frac{\omega}{j\omega t \epsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) (1 - k_{33}^2)} \times$ $\times \left[ 1 - k_{33}^2 \frac{\text{tg}(\omega \omega/2v)}{\omega \omega/2v} \right]$
<b>2.2. Высокочастотные</b>				
ПлВ <sub>p</sub>	$c_{33}^D$	$\beta_{33}^S$	$h_{33}$	$Z = \frac{t}{j\omega \omega l \epsilon_{33}^S} \left[ 1 - k_t^2 \frac{\text{tg}(\omega t/2v)}{\omega t/2v} \right]$

Мода	Константы материала			Решение дифференциального уравнения
	Упругие	Диэлектрические	Пьезо-электрические	Комплексное сопротивление Z
ДВ <sub>p</sub>	$c_{33}^D$	$\beta_{33}^S$	$h_{33}$	$Z = \frac{t}{j\omega\pi R^2 \epsilon_{33}^S} \left[ 1 - k_t^2 \frac{\text{tg}(\omega t/2v)}{\omega t/2v} \right]$
ПлСВ <sub>p</sub>	$c_{55}^D$	$\beta_{11}^S$	$h_{15}$	$Z = \frac{t}{j\omega w l \epsilon_{11}^S} \left[ 1 - k_{15}^2 \frac{\text{tg}(\omega t/2v)}{\omega t/2v} \right]$
Мода	Коэффициент электромеханической связи (k)		Скорость распространения колебаний (v)	
<b>1. Пьезомягкие моды</b>				
<b>1.1. Низкочастотные</b>				
CH <sub>t</sub>	$k_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{\epsilon_{33}^T s_{11}^E}$			$v = \frac{1}{\sqrt{\rho s_{11}^E}}$
KH <sub>t</sub> KH <sub>p</sub>	$k_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{\epsilon_{33}^T s_{11}^E}$			$v = \frac{1}{\sqrt{\rho s_{11}^E}}$
СФ <sub>p</sub>	$k_p^2 = \frac{2d_{31}^2}{s_{11}^E (1 - \sigma)} = \frac{2k_{31}^2}{1 - \sigma}$			$v = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \rho s_{11}^E (1 - \sigma)}}$
ДН <sub>t</sub>	$k_p^2 = \frac{2k_{31}^2}{1 - \sigma}$			$v = \frac{1}{\sqrt{\rho s_{11}^E (1 - \sigma^2)}}$
ПС <sub>t</sub> - 1	$k_{31}'^2 = \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \cdot \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma}$			$v = \frac{1}{\sqrt{\rho s_{11}^E (1 - \sigma^2)}}$
ПС <sub>t</sub> - 2	$k_{31}''^2 = \frac{(k_{31} - B k_{33})^2}{(1 - k_{33}^2)(1 - B^2)}$			$v = \frac{1}{\sqrt{\rho s_{11}^E (1 - B^2)}}$
	$B = \frac{s_{13}^E}{\sqrt{s_{11}^E s_{33}^E}}; \quad k_{33}^2 = \frac{d_{33}^2}{\epsilon_{33}^T s_{33}^E}$			
<b>1.2. Высокочастотные</b>				
ПВ <sub>t</sub>	$\frac{k_t'^2}{1 - k_t'^2} = \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}^S c_{11}^E}$			$v = \sqrt{\frac{c_{11}^E}{\rho}}$
	$k_t'^2 = \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}^S c_{11}^D}$			

Мода	Коэффициент электромеханической связи ( $k$ )	Скорость распространения колебаний ( $v$ )
ЦВ <sub>t</sub>	—	—
ПВ <sub>t</sub>	$k_{31}^{\prime\prime 2} = \frac{(k_p - Ak_{33})^2}{1 - A^2} - (k_{31} - Bk_{33})^2$ $k_p^{\prime 2} = \frac{(k_p - Ak_{33})^2}{(1 - A^2)(1 - k_{33}^2)}$	$v = \sqrt{\frac{1 - B^2}{\rho s_{11}^E (1 - \sigma^2)(1 - A^2)}}$
ЦВ <sub>t</sub>	$k_p^{\prime} = \frac{(k_p - Ak_{33})^2}{(1 - A^2)(1 - k_{33}^2)}$ $\sigma' = \frac{\sigma - B^2}{1 - B^2}$	—
<b>2. Пьезоэлектрические моды</b>		
2.1. Низкочастотные		
ЧН <sub>p</sub> ЦН <sub>p</sub>	$k_{33}^2 = \frac{g_{33}^2}{\beta_{33}^T s_{33}^E} = \frac{d_{33}^2}{\epsilon_{33}^T \epsilon_{33}^D}$	$v = \frac{1}{\sqrt{\rho s_{33}^D}}$
ПС <sub>p</sub>	$k_{33}^{*2} = \frac{D^2}{1 + \frac{s_{33}^D (1 - D^2)}{\epsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) (g_{33} - g_{31} s_{13}^D / s_{33}^D)^2}}$	$v = \frac{1}{\sqrt{\rho \left( s_{33}^D - \frac{s_{33}^{D^2}}{s_{11}^D} \right)}}$
2.2. Высокочастотные		
ПлВ <sub>p</sub> ДВ <sub>p</sub>	$k_t^2 = \frac{h_{33}^2}{\beta_{33}^S c_{33}^D}$	$v = \sqrt{\frac{c_{33}^D}{\rho}}$
ПлСВ <sub>p</sub>	$k_{15}^2 = \frac{h_{15}^2}{\beta_{11}^S c_{55}^D}$	$v = \sqrt{\frac{c_{55}^D}{\rho}}$

Таблица 2.4. Примеры электромеханических аналогий

Механическая система	Дифференциальное уравнение механической системы	Эквивалентная схема	Дифференциальное уравнение эквивалентной схемы
 <p>Стержень с продольными колебаниями</p>	$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} + R \frac{d \xi}{dt} + \frac{1}{c} \xi = F$	 <p>Передающая линия</p>	$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = U$ $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$

шего раздела. Полезность последнего связана, в частности, с возможностью измерения на моде ПВ<sub>1</sub> пьезоконстанты  $e_{31}$ , которая до настоящего времени определялась расчетным путем.

### § 2.3. Эквивалентные схемы ПКЭ

Для анализа характеристик ПКЭ и преобразователей широко используется метод электроакустических аналогий [143]. Метод основан на том, что дифференциальные уравнения, описывающие явления в ПКЭ и преобразователе, одинаковы по форме с уравнениями, описывающими явления в некоторой электрической схеме, называемой эквивалентной (табл. 2.4, 2.5).

Т а б л и ц а 2.5. Аналоги механических и электрических величин

Механическая величина	Электрическая величина
Сила $F$	Напряжение $U$
Смещение $\xi$	Заряд $q$
Колебательная скорость $v = d\xi/dt$	Ток $i = dq/dt$
Масса $m$	Индуктивность $L$
Гибкость $c$	Емкость $C$
Сопrotивление вязкому трению $R$	Сопrotивление $R$
Кинетическая энергия $mv^2/2$	Энергия магнитного поля $Li^2/2$
Потенциальная энергия упругой силы $\xi^2/2c$	Энергия электрического поля $q^2/(2C)$
Линейная плотность $\partial m/\partial x$	Погонная индуктивность $\partial L/\partial x$
Удельная гибкость $\partial c/\partial x$	Погонная емкость $\partial C/\partial x$
Скорость звука в стержне	Скорость электромагнитных волн в
$v = \left( \frac{\partial m}{\partial x} \cdot \frac{\partial c}{\partial x} \right)^{-1/2}$	линии $v = \left( \frac{\partial L}{\partial x} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \right)^{-1/2}$

Характерной особенностью рассматриваемых эквивалентных схем электромеханических преобразователей является наличие идеального трансформатора, связывающего механическую и электрическую стороны, коэффициент электромеханической трансформации  $N$  которого равен отношению внешней статической силы к генерируемому ею внутреннему электрическому напряжению на ПКЭ, зажатом в направлении колебаний рассматриваемого вида.

Продольно колеблющийся стержень в электрическом поле, параллельном его длине. В отсутствие пьезоэффекта электрическим аналогом является линия с распределенными параметрами (рис. 2.5). Для отражения процесса электромеханического преобразования, обусловленного пьезоэффектом, в среднюю ветвь схемы вводится идеальный трансформатор, механическая сторона которого включается последовательно в разрыв ветви (рис. 2.6) или параллельно ей [138]. На рис. 2.6  $C_0$  — емкость

ПКЭ, заторможенного по отношению к рассматриваемому типу колебаний; введение —  $N^2 C_2$  учитывает силы, возникающие в результате пьезоэффекта и проявляющие свое влияние, как отрицательная гибкость.

На рис. 2.6

$$N = \frac{\omega t}{l} \frac{g_{33}}{s_{33}^E \rho_{33}^T} = \frac{\omega t}{l} \frac{d_{33}}{s_{33}^E}; \quad (2.41)$$

$$v^D = (\rho s_{33}^D)^{-1/2}; \quad (2.42)$$

$$z_0 = \rho v^D \omega t; \quad (2.43)$$

$$C_0 = \frac{\omega t}{l} \epsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2). \quad (2.44)$$

Выражения (2.41) — (2.44) определяют соответственно коэффициент электромеханической трансформации  $N$ , скорость распространения колебаний (звука)  $v^D$ , волновое сопротивление

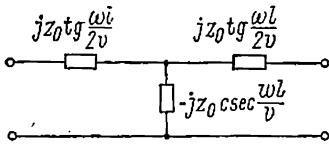


Рис. 2.5. Эквивалентная схема для продольных колебаний стержня при отсутствии пьезоэффекта.

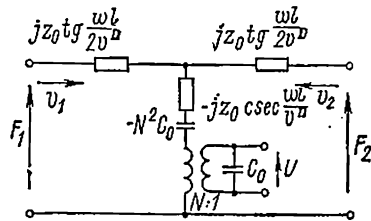


Рис. 2.6. Полная эквивалентная схема для продольных колебаний пьезокерамического стержня с электрическим полем, параллельным колебаниям. Электроды на торцах — мода  $CH_p$ .

стержня  $z_0$ , равное отношению силы к колебательной скорости, и электрическую емкость  $C_0$  зажатого по длине стержня.

Пластина, колеблющаяся по толщине в электрическом поле, параллельном его толщине. Логическое построение эквивалентной схемы для данного случая аналогично приведенному выше. Параметры эквивалентной схемы (рис. 2.7) равны

$$N = C_0 h_{33}; \quad (2.45)$$

$$v^D = (c_{33}^D / \rho)^{1/2}; \quad (2.46)$$

$$z_0 = \rho v^D \omega t; \quad (2.47)$$

$$C_0 = \frac{l \omega}{t} \epsilon_{33}^S. \quad (2.48)$$

Продольно колеблющийся стержень в электрическом поле, перпендикулярном его длине. В рассматриваемой схеме (рис. 2.8) отрицательная гибкость не проявляет себя. Параметры эквива-

лентной схемы равны

$$N = \frac{\omega d_{31}}{s_{11}^E}; \quad (2.49)$$

$$v^E = (\rho s_{11}^E)^{-\frac{1}{2}}; \quad (2.50)$$

$$z_0 = \rho v^E \omega t; \quad (2.51)$$

$$C_0 = \frac{l\omega}{t} \epsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2). \quad (2.52)$$

В представленных эквивалентных схемах учет потерь производится введением комплексных констант, например,  $s$ ,  $\epsilon$ ,  $d$  [133], базирующемся на релаксационном характере диссипации энергии в пьезокерамике. Применяется также учет потерь,

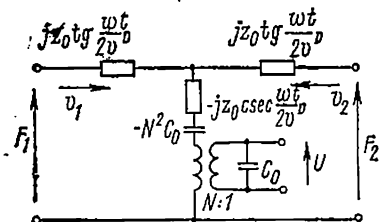


Рис. 2.7. Полная эквивалентная схема для продольных колебаний пьезокерамической пластины с электрическим полем, параллельным колебаниям. Электроды на больших поверхностях — мода ПЛВ<sub>p</sub> или ДВ<sub>p</sub>.

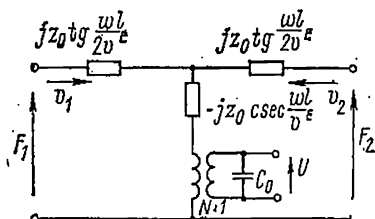


Рис. 2.8. Полная эквивалентная схема для продольных колебаний стержня с электрическим полем, перпендикулярным колебаниям. Электроды на боковых поверхностях — мода СН<sub>t</sub>.

основанный на понятии вязкой силы, т. е. силы, величина которой пропорциональна скорости смещения и противоположна ей [117]: В первом случае в эквивалентную схему вводится частотно-зависимое сопротивление, во втором — частотно-независимое.

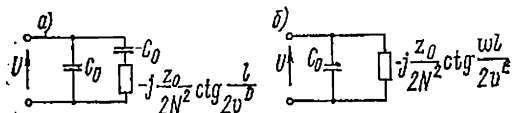


Рис. 2.9. Полная эквивалентная схема свободно колеблющегося ПКЭ:  
а — мода СН<sub>p</sub>; б — мода СН<sub>t</sub>

При измерении электрофизических параметров ПКЭ обычно не нагружены с механической стороны, что эквивалентно короткому замыканию механических клемм. В этом случае эквивалентной схемой ПКЭ является двухполюсник.

В схемах, приведенных на рис. 2.9, ветвь, содержащая статическую емкость  $C_0$ , отражает электрическую сторону ПКЭ, а другая ветвь — механическую,



Условиями резонанса механической стороны будут следующие:

— для схемы, показанной на рис. 2.9, а,

$$\omega C_0 - \frac{2N^2}{z_0} \operatorname{tg} \frac{\omega l}{2v^D} = 0; \quad (2.53)$$

— для схемы, изображенной на рис. 2.9, б,

$$\operatorname{ctg} \frac{\omega l}{2v^E} = 0. \quad (2.54)$$

Графическое решение уравнения (2.53) приведено на рис. 2.10. Решениями уравнения (2.54) являются

$$\frac{\omega l}{2v^E} = \left( \frac{2n-1}{2} \right) \pi, \quad n = 1, 2, 3 \dots, \quad (2.55)$$

т. е. резонанс наблюдается при длине стержня, кратной нечетному числу длин полуволн.

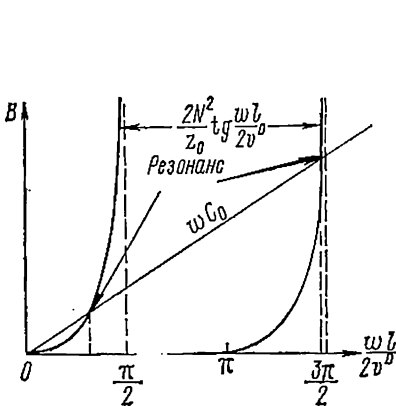


Рис. 2.10. Определение частот механического резонанса для продольных колебаний стержня с электрическим полем, параллельным колебаниям. Мода  $CH_p$ .

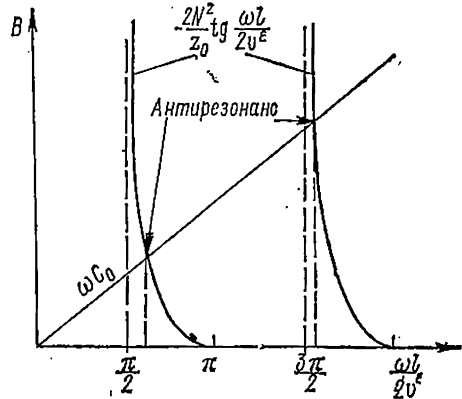


Рис. 2.11. Определение частот антирезонанса для продольных колебаний стержня с электрическим полем, перпендикулярным колебаниям. Мода  $CH_t$ .

Полные проводимости двухполюсников равны:

— для схемы, показанной на рис. 2.9, а,

$$Y = j \frac{\omega C_0}{1 - \frac{N^2}{\omega C_0 z_0} \operatorname{tg} \frac{\omega l}{2v^D}} = j \frac{\omega C_0 z_0 \operatorname{ctg} \frac{\omega l}{2v^D}}{z_0 \operatorname{ctg} \frac{\omega l}{2v^D} - \frac{2N^2}{\omega C_0}}; \quad (2.56)$$

— для схемы, приведенной на рис. 2.9, б,

$$Y = j \left( \omega C_0 + \frac{2N^2}{z_0} \operatorname{tg} \frac{\omega l}{2v^E} \right). \quad (2.57)$$

Условия равенства нулю адмитансов дают частоты  
— для схемы, изображенной на рис. 2.9, а,

$$\frac{\omega l}{2v^D} = \frac{(2n-1)}{2} \pi, \quad n = 1, 2, 3 \dots; \quad (2.58)$$

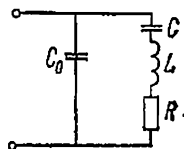
— для схемы, приведенной на рис. 2.9, б,

$$\omega C_0 + \frac{2N^2}{z_0} \operatorname{tg} \frac{\omega l}{2v^E} = 0. \quad (2.59)$$

Графическое решение уравнения (2.59) приведено на рис. 2.11. Определенные таким образом частоты называются антирезонансными, они всегда выше резонансных. Учет потерь несколько меняет значения резонансных и антирезонансных частот ПКЭ.

Как видно из (2.56) и (2.57), на частотах  $\omega l / (2v) = n\pi$  проводимость определяется только емкостью  $C_0$ . Для упрощения анализа механическую ветвь двухполюсника (см. рис. 2.9) аппроксимируют в области резонансных частот последовательным

Рис. 2.12. Упрощенная эквивалентная схема ПКЭ.



резонансным контуром (рис. 2.12), параметры которого определяются из системы

$$\left. \begin{aligned} \omega L - \frac{1}{\omega C} &= X; \\ \omega L + \frac{1}{\omega C} &= \omega \frac{dX}{d\omega}, \end{aligned} \right\} \quad (2.60)$$

где  $X$  — реактанс механической стороны.

В результате решения системы (2.60)

$$\left. \begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \left( \frac{dX}{d\omega} + \frac{X}{\omega} \right); \\ C &= 2 \left( \omega^2 \frac{dX}{d\omega} - \omega X \right)^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (2.61)$$

Подстановка в (2.61) соответствующих величин, определенных на частоте антирезонанса для схемы, приведенной на рис. 2.9, а, и частоте резонанса для схемы, изображенной на рис. 2.9, б, дает

$$L = \frac{1}{N^2} \frac{m}{8}, \quad (2.62)$$

где  $m$  — масса ПКЭ.

Таблица 2.6. Соотношения между параметрами многоконтурной

Параметры эквивалентной схемы	Классификация и		
	Пьезоэлектрики		
	$СН_t$	$КН_t, КН_p$	$СФ_p$
$C_0$	$\frac{\omega t}{l} e_{33}^T (1 - k_{31}^2)$	$\frac{2\pi a \omega e_{33}^T}{l} (1 - k_{31}^2)$	$\frac{4\pi a^2}{l} e_{33}^T (1 - k_p^2)$
$N$	$\frac{\omega d_{31}}{s_{11}^E}$	$\frac{2\pi \omega d_{31}}{s_{11}^E}$	$\frac{8\pi a d_{31}}{s_{11}^E + s_{12}^E}$
$C_n$	$\frac{8N^2 s_{11}^E l}{(2n - 1)^2 \pi^2 \omega t}$	$\frac{N^2 s_{11}^E a}{2\pi \omega t}$	$\frac{N^2 (s_{11}^E + s_{12}^E)}{8\pi t}$
$L_n$	$\frac{m}{8N^2}$	$\frac{m}{N^2}$	$\frac{m}{N^2}$
$f_{sn}$	$\frac{(2n - 1) v^E}{2l}$	$\frac{v^E}{2\pi a}$	$\frac{v^E}{2\pi a}$
$f_{pn}$	$\frac{1}{2\pi} \times$ $\times \left[ \frac{1}{L_n C_n} \left( 1 + \frac{C_n}{C_0} \right) \right]^{1/2}$	$\frac{1}{2\pi} \times$ $\times \left[ \frac{1}{LC} \left( 1 + \frac{C}{C_0} \right) \right]^{1/2}$	$\frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{LC} \left( 1 + \frac{C}{C_0} \right) \right]^{1/2}$
$v$	$(\rho s_{11}^E)^{-1/2}$	$(\rho s_{11}^E)^{-1/2}$	$\left( \rho \frac{s_{11}^E + s_{12}^E}{2} \right)^{-1/2}$
$k^2$	$k_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E e_{33}^T}$	$k_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E e_{33}^T}$	$k_p^2 = \frac{2d_{31}^2}{(s_{11}^E + s_{12}^E) e_{33}^T}$

Примечания. 1. Обозначение мод колебаний в соответствии

Для схемы, приведенной на рис. 2.9, а,

$$C = \left[ \frac{\pi^2}{8} \frac{(2n - 1)^2}{N^2} \frac{\omega t}{s_{33}^D l} - \frac{1}{C_0} \right]^{-1}. \quad (2.63)$$

Для схемы, показанной на рис. 2.9, б,

$$C = \frac{8N^2}{(2n - 1)^2 \pi^2} \frac{s_{11}^E l}{\omega t}. \quad (2.64)$$

Обобщая схему, приведенную на рис. 2.12, можно заключить, что многорезонансная система, моделирующая ПКЭ или преоб-

эквивалентной схемы (см. рис. 2.13) и константами пьезокерамики

обозначения мод колебаний

Пьезоэлектрики		
СН <sub>p</sub>	ПлВ <sub>p</sub>	ПлСВ <sub>p</sub>
$\frac{\omega t}{l} e_{33}^T (1 - k_{33}^2)$ $\frac{\omega t}{l} \frac{d_{33}}{s_{33}^E}$ $\left[ \frac{\pi^2 (2n-1)^2 \omega t}{8N^2 s_{33}^D l} - \frac{1}{C_0} \right]^{-1}$ $\frac{m}{8N^2}$ $\frac{1}{2\pi} (L_n C_n)^{-1/2}$ $\frac{(2n-1) v^D}{2l}$ $(s_{33}^D)^{-1/2}$ $k_{33}^2 = \frac{d_{33}^2}{s_{33}^E e_{33}^T}$	$\frac{\omega l}{t} e_{33}^S$ $C_0 h_{33}$ $\left[ \frac{\pi^2 (2n-1)^2 \omega l c_{33}^D}{8N^2 s_{33}^D l} - \frac{1}{c_0} \right]^{-1}$ $\frac{m}{8N^2}$ $\frac{1}{2\pi} (L_n C_n)^{-1/2}$ $\frac{(2n-1) v^D}{2t}$ $\left( \frac{c_{33}^D}{\rho} \right)^{1/2}$ $k_t^2 = \frac{h_{33}^2}{\beta_{33}^S c_{33}^D}$	$\frac{\omega l}{t} e_{11}^S$ $C_0 h_{15}$ $\left[ \frac{\pi^2 (2n-1)^2 \omega l c_{55}^D}{8N^2 t} - \frac{1}{C_0} \right]^{-1}$ $\frac{m}{8N^2}$ $\frac{1}{2\pi} (L_n C_n)^{-1/2}$ $\frac{(2n-1) v^D}{2t}$ $\left( \frac{c_{55}^D}{\rho} \right)^{1/2}$ $k_{15}^2 = \frac{h_{15}^2}{\beta_{11}^S c_{55}^D}$

с табл. 2.1 и 2.2. 2.  $n$  — номер резонанса ( $n = 1, 2, 3 \dots$ ).

разователь, может быть представлена двухполюсником, содержащим статическую емкость  $C_0$ , параллельно которой подключены последовательные колебательные контуры (рис. 2.13). Параметры контуров определяются из (2.60) — (2.61), если даны точные выражения для резонансных частот и комплексного сопротивления.

Частота каждого механического резонанса

$$f_s = \frac{1}{2\pi} (L_n C_n)^{-1/2} \quad (2.65)$$

и соответствующего ему параллельного резонанса

$$f_p = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{L_n C_n} \left[ 1 + \left( \frac{C_n}{C_0} \right) \right] \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.66)$$

В табл. 2.6 приведены соотношения между параметрами эк-

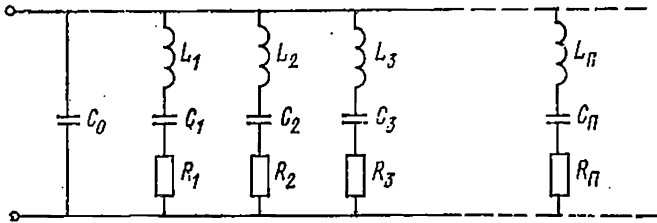


Рис. 2.13. Эквивалентная схема многорезонансного ПКЭ или преобразователя.

вивалентной схемы, показанной на рис. 2.13, и константами пьезокерамики для нескольких типов ПКЭ.

## § 2.4. Основные параметры пьезокерамического резонатора

Под резонатором понимают колебательную систему с резко выраженными резонансными свойствами. ПКЭ и преобразователи на их основе даже в случае одномерного приближения представляют системы с бесконечным числом степеней свободы и описываются бесконечным набором собственных частот, который определяется из решения электромеханической задачи (см. § 2.2) или из анализа эквивалентных схем (см. § 2.3). Набор собственных частот для ПКЭ конечных размеров определяется из решения вариационной задачи [84] или задачи о трехмерных колебаниях пьезокерамических прямоугольных элементов [150] либо экспериментально.

Свободный ПКЭ или преобразователь удовлетворяют определению резонатора вблизи любой ярковыраженной собственной частоты. Параметры такого резонатора определяются соответствующей собственной частотой и будут справедливы в ограниченном частотном диапазоне вблизи этой частоты.

Для определения параметров пьезорезонатора используется представление последнего в виде эквивалентной схемы с сосредоточенными постоянными (рис. 2.14). К подобному виду можно привести полную эквивалентную схему на любой из известных одномерных мод (§ 2.3). В этом случае схема, показанная на рис. 2.14, будет характеризовать работу пьезорезонатора на какой-либо гармонике рассматриваемой одномерной моды.

Работа ПКЭ конечных размеров описывается многоконтурной эквивалентной схемой [84], в которой механическая сторона представлена набором цепочек  $R-L-C$  (рис. 2.15), оп-

ределяющих каждая различные моды колебаний. Сужая рассматриваемый частотный диапазон или подбирая соотношение размеров, можно применять схему, изображенную на рис. 2.14, и в этом случае.

В схеме, приведенной на рис. 2.14, учитываются механические и диэлектрические потери посредством частотно-независимых эквивалентных сопротивлений  $R_1$  и  $R_0$ .

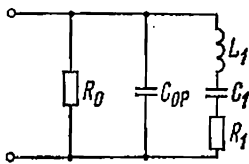


Рис. 2.14. Эквивалентная схема пьезо-керамического резонатора.

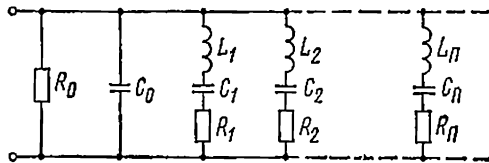
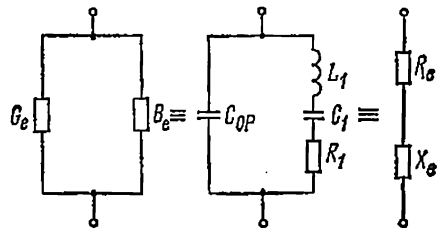


Рис. 2.15. Эквивалентная схема ПКЭ или преобразователя конечных размеров.

За основные параметры пьезорезонатора принимаются параметры эквивалентной схемы, показанной на рис. 2.14. В табл. 2.7 приведены эти параметры и дополнительные характеристики пьезорезонатора [135].

Рис. 2.16. Параллельная и последовательная схемы замещения пьезо-керамического резонатора.



Эквивалентную схему, изображенную на рис. 2.14, можно представить последовательной схемой замещения, определяющей комплексное сопротивление, или параллельной схемой замещения, определяющей комплексную проводимость пьезорезонатора (рис. 2.16). Комплексная проводимость  $Y$  (комплексное сопротивление  $Z$ ) схемы, показанной на рис. 2.14, равна

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R_0} + \frac{R_1}{R_1^2 + X_d^2} + j \left( \omega C_0 - \frac{X_d}{R_1^2 + X_d^2} \right), \quad (2.67)$$

где  $X_d = \omega L_1 - (1/\omega C_1)$ .

Выражение (2.67) можно представить в иной форме

$$Y = \frac{1}{R_0} + \frac{\omega_s C_1 Q}{1 + \nu^2 Q^2} + j \left( \omega C_0 - \frac{\nu \omega_s C_1 Q^2}{1 + \nu^2 Q^2} \right), \quad (2.68)$$

где  $\nu = (\omega/\omega_s - \omega_s/\omega)$  — относительная расстройка,

Таблица 2.7. Параметры пьезорезонатора (см. эквивалентную схему рис. 2.14)

Основные параметры		Производные параметры		
Обозначение	Наименование	Обозначение	Определение	Наименование
$C_{op}$	Емкость пьезорезонатора, заторможенного по отношению к рассматриваемому резонансу	$r$	$r = \frac{C_{op}}{C_1}$	Емкостное отношение
$C_1$	Динамическая емкость	$Q_m$	$Q_m = \frac{\omega_s L_1}{R_1} = \frac{1}{\omega_s C_1 R_1}$	Механическая добротность
$L_1$	Динамическая индуктивность	$M$	$M = \frac{Q_m}{r} = \frac{1}{\omega_s C_{op} R_1}$	Коэффициент качества
		$f_s$	$f_s = \frac{1}{2\pi \sqrt{L_1 C_1}}$	Резонансная частота
$R_1$	Динамическое сопротивление (эквивалентное сопротивление механических потерь)	$N$	$N = f_s d$	Частотная постоянная
		$\Gamma_1$	$\Gamma_1 = \frac{C_1 t}{A}$	Константа* динамической емкости

Примечание.  $d$  — резонансный размер;  $t$  — расстояние между электродами;  $A$  — площадь электродов.

Пренебрегая диэлектрическими потерями и используя данные табл. 2.7, для комплексной проводимости можно записать [142]:

$$Y = j \frac{\omega r}{\omega_s R_1 Q} + \frac{1}{R_1 (1 + jQv)}. \quad (2.69)$$

При пренебрежении потерями пьезорезонатор характеризуется одной парой характеристических частот: 1) частотой резонанса последовательного колебательного контура  $f_s$  (частотой динамического резонанса  $\omega_s L_1 - (1/\omega_s C_1) = 0$ ); 2) частотой резонанса параллельно колебательного контура  $f_p$  (частота антирезонанса  $\omega_p C_0 - [\omega_p L_1 - (1/\omega_p C_1)] = 0$ ).

Учет потерь дает три пары характеристических частот  $f_m$  и  $f_n$ ,  $f_s$  и  $f_p$ ,  $f_r$  и  $f_a$ . Определения этих частот в соответствии с [135] даются в табл. 2.8. В таблице приведены также важные для практики частоты  $f_{s-1/2}$  и  $f_{s+1/2}$ ,  $f_{p-1/2}$  и  $f_{p+1/2}$ . Все указанные характеристические частоты поясняются векторными диаграммами, построенными по (2.67) на плоскости  $G - jB$  для комплексной

Таблица 2.8. Характеристические частоты пьезорезонатора

Обозначение	Определение	Наименование
$f_{s-1/2}$	$\frac{\partial B_e}{\partial f} = 0; B_e = \max$	Частота максимума реактивной составляющей комплексной проводимости
$f_m$	$\frac{\partial  Y }{\partial f} = 0;  Y  = \max$	Частота максимума модуля комплексной проводимости (минимума модуля комплексного сопротивления)
$f_s$	$\frac{\partial G_e}{\partial f} = 0; B_d = 0$	Частота динамического (последовательного) резонанса
$f_r$	$B_e = 0; X_e = 0$	Резонансная частота нулевого реактанса
$f_{s+1/2}$	$\frac{\partial B_e}{\partial f} = 0; B_e = \min$	Частота минимума реактивной составляющей комплексной проводимости
$f_\varphi$	$\frac{\partial}{\partial f} \left( \frac{X_e}{R_e} \right) = 0$ $= \frac{\partial}{\partial f} \left( \frac{B_e}{G_e} \right) = 0$	Частота максимума фазы $\varphi$
$f_{p-1/2}$	$\frac{\partial X_e}{\partial f} = 0; X_e = \max$	Частота максимума реактивной составляющей комплексного сопротивления
$f_a$	$B_e = 0; X_e = 0$	Антирезонансная частота нулевого реактанса
$f_p$	$\frac{\partial R_e}{\partial f} = 0; X_d = 0$	Частота параллельного резонанса — антирезонансная частота
$f_n$	$\frac{\partial  Z }{\partial f} = 0;  Z  = \max$	Частота максимума модуля комплексного сопротивления (минимума модуля комплексной проводимости)
$f_{p+1/2}$	$\frac{\partial X_e}{\partial f} = 0; X_e = \min$	Частота минимума реактивной составляющей комплексного сопротивления



проводимости, и на плоскости  $R - jX$  — для комплексного сопротивления (рис. 2.17). Справедливость представленной на рисунке частотной зависимости, например вектора комплексной проводимости, следует из рассмотрения выражения (2.67): его

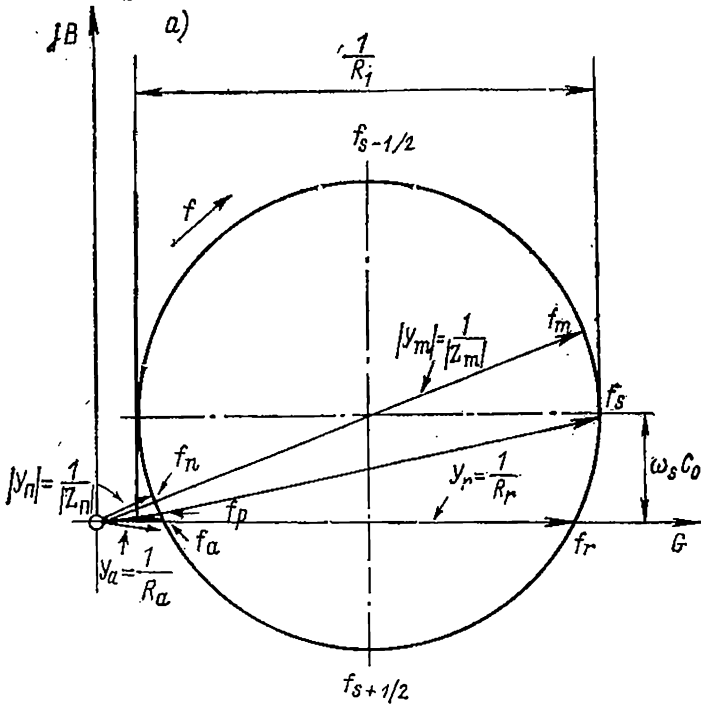


Рис. 2.17. Круговые диаграммы комплексной про

можно представить в виде векторной суммы

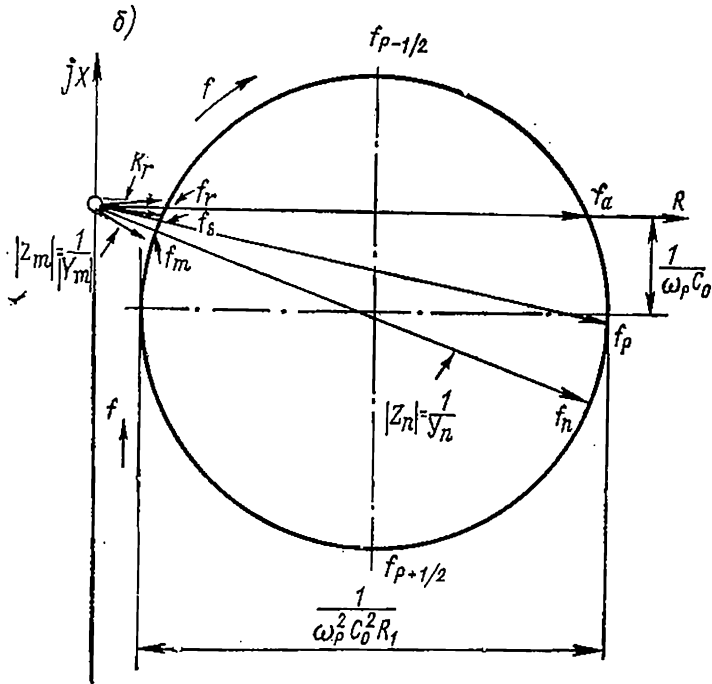
$$Y = Y_s + Y_d, \quad (2.70)$$

где  $Y_s = (1/R_0) + j\omega C_0$  — комплексная проводимость электрической стороны пьезорезонатора;  $Y_d = G_d + jB_d = (R_1)/(R_1^2 + X_d^2) - jX_d/(R_1^2 + X_d^2)$  — комплексная проводимость механической стороны. Последняя удовлетворяет соотношению

$$\left(G_d - \frac{1}{2R_1}\right)^2 + B_d^2 = \frac{1}{4R_1^2}. \quad (2.71)$$

Выражение (2.71) представляет окружность на комплексной плоскости динамической проводимости диаметром  $1/R_1$  с центром, лежащим на оси  $G$  и смещенным на  $1/2R_1$  от начала координат. Если принять  $Y_s = \text{const}$  в диапазоне  $\Delta\omega$  обхода круга динамическим адмитансом, то (2.70) будет представлять круго-

вую диаграмму, центр которой смещен по оси  $G$  на  $(1/2R_1 + 1/R_0)$  и по оси  $B$  на  $\omega_s C_0$  (см. рис. 2.17,  $a$ ). Аналогично можно рассмотреть выражение (2.67) для комплексного сопротивления (2.17,  $b$ ).



водимости ( $a$ ) и комплексного сопротивления ( $b$ ).

Представление комплексной проводимости в виде круговой диаграммы справедливо, если диаметр диаграммы  $1/R_1$  будет существенно больше изменения  $Y_s$ , по крайней мере, в диапазоне частот  $f_{s-1/2} \div f_{s+1/2}$ :

$$\frac{1}{R_1} \gg \Delta\omega C_0. \quad (2.72)$$

Так как  $\Delta\omega = \omega_{s+1/2} - \omega_{s-1/2} = \omega_s/Q$ , то из (2.72) получаем условие применимости круговой диаграммы комплексной проводимости пьезорезонатора [130]:

$$\frac{Q^2}{r} \gg 1. \quad (2.73)$$

Для определения параметров пьезорезонатора необходимы частоты  $f_s$  и  $f_p$ . Однако на практике наиболее просто определяются частоты экстремальных значений модуля комплексной проводимости (сопротивления)  $f_m$  и  $f_n$  или частоты нулевого реактанса  $f_r$  и  $f_a$ .

Остановимся на определении емкости  $C_0$  (см. рис. 2.14). При применении полных эквивалентных схем (см. рис. 2.9) для одномерных приближений  $C_0$  соответствует емкости ПКЭ заторможенного по отношению к рассматриваемой моде колебаний. При этом для низкочастотных одномерных мод

$$C_0 = C^T (1 - k_n^2), \quad (2.74)$$

где  $k_n$  — коэффициент электромеханической связи материала, соответствующий рассматриваемой низкочастотной моде колебаний.

Для среднечастотных одномерных мод

$$C_0 = C^T (1 - k_n^2)(1 - k_c^2), \quad (2.75)$$

где  $k_c$  — коэффициент электромеханической связи материала для среднечастотной моды.

Для высокочастотных одномерных мод

$$C_0 = C^T (1 - k_n^2)(1 - k_c^2)(1 - k_b^2) = C^T (1 - k_{i3}^2) = C^s, \quad (2.76)$$

где  $k_b$  — коэффициент электромеханической связи материала для высокочастотной моды;  $k_{i3}$  — инвариантный коэффициент электромеханической связи продольных колебаний;  $C^s = \varepsilon^s A/t$  — емкость зажатого пьезоэлемента.

Рассмотренное определение  $C_0$  сохраняется при применении на одномерных модах многоконтурных эквивалентных схем.

Одноконтурная эквивалентная схема, изображенная на рис. 2.14, при применении на одномерных модах описывает работу пьезоэлемента на какой-либо из гармоник рассматриваемой моды колебаний. В этом случае  $C_{0p}$  (емкость заторможенного пьезорезонатора) должна представлять емкость ПКЭ, заторможенного к рассматриваемому резонансу. В результате в схеме, показанной на рис. 2.14,  $C_{0p}$  будет больше, чем в схемах, приведенных на рис. 2.6—2.9, и в выражениях (2.74) — (2.76)  $C_{0p}$  может быть определена как

$$C_{0p} = C^T \prod_{i=0}^n (1 - k_{\Phi i}^2), \quad (2.77)$$

где  $k_{\Phi i}$  — эффективный коэффициент электромеханической связи (см. § 2.5).

При увеличении номера гармоники разность между  $C_{0p}$  и  $C_0$  быстро падает. Аналогичное рассмотрение для  $C_{0p}$  может быть использовано при применении схемы, изображенной на рис. 2.14, на различных модах колебаний ПКЭ конечных размеров [84].

### § 2.5. Эффективный (динамический) коэффициент электромеханической связи пьезокерамического резонатора

Для пьезорезонатора, представленного рис. 2.14, эффективный динамический коэффициент электромеханической связи (КЭМСД) определяется [124] через параметры эквивалентной

схемы или характеристические частоты  $f_s$  и  $f_p$ :

$$k_{\text{эф}}^2 = \frac{C_1}{C_0 + C_1} = \frac{f_p^2 - f_s^2}{f_p^2}. \quad (2.78)$$

В (2.78) существует неопределенность значения  $C_0$ . В дальнейшем рассмотрение физического смысла  $k_{\text{эф}}$  на основе энергетических принципов позволит внести ясность в определение  $C_0$  резонатора.

Введение КЭМСД пьезорезонатора имеет смысл в связи с тем, что он характеризует не только материал, но и эффективность преобразования энергии на данном резонансе.

Коэффициент  $k_{\text{эф}}$  можно определить так же, как и коэффициент электромеханической связи материала (статический коэффициент электромеханической связи) (см. § 1.4), исходя из общих энергетических принципов

$$k_{\text{эф}}^2 = \frac{W_{\text{эм}}^2}{W_{\text{э}}W_{\text{м}}},$$

где  $W_{\text{м. э. эм}} = \iiint_V u_{\text{м. э. эм}} dV$  — общая упругая, электрическая, взаимная энергии ПКЭ в объеме  $V$ .

Из определения коэффициента электромеханической связи материала следует, в частности, что для свободного ПКЭ, возбуждаемого электрическим полем, он определяет долю полной входной электрической энергии, которая превращается в механическую [80]:

$$k^2 = 1 - \frac{W_{\text{э}}}{W_{\text{св}}}, \quad (2.79)$$

где  $W_{\text{э}}, W_{\text{св}}$  — энергия соответственно зажатого и свободного ПКЭ по отношению к перемещениям для рассматриваемой моды колебаний.

Анализируя схему рис. 2.15, выражение (2.79) можно представить в виде

$$k^2 = 1 - \frac{C_{\text{з}}}{C_{\text{св}}}, \quad (2.80)$$

где  $C_{\text{з}}, C_{\text{св}}$  — емкость соответственно зажатого и свободного ПКЭ или преобразователя по отношению к перемещениям для рассматриваемых колебаний.

По аналогии с (2.80) эффективный коэффициент электромеханической связи для  $n$ -го резонанса

$$k_{\text{эф}n}^2 = 1 - \frac{C_n^{\text{с}}}{C_n^{\text{т}}} = \frac{C_n}{C_n^{\text{т}}}, \quad (2.81)$$

где  $C_n^{\text{с}}$  — емкость резонатора, зажатого по отношению к колебаниям на  $n$ -м резонансе, или емкость резонатора, зажатого на

всех собственных частотах порядка, начиная с  $n$  и ниже;  $C_n^T$  — емкость резонатора, свободного для  $n$ -го резонанса, или емкость резонатора, свободного по отношению к колебаниям на всех резонансах, начиная с  $n$ -го порядка;  $C_n$  — емкость динамической стороны резонатора или емкость  $n$ -й динамической ветви.

Таким образом, по аналогии с коэффициентом электромеханической связи материала, КЭМСД можно определить как коэффициент электромеханической связи резонатора; квадрат эффективного коэффициента электромеханической связи резонатора — это отношение электрической (механической) работы, которая может быть выполнена при идеальных условиях на рассматриваемом резонансе, ко всей энергии, полученной из механического (электрического) источника.

Из определения (2.81) следует, что емкость  $C_{n+1}^T$  для  $(n+1)$  резонанса является емкостью  $C_n^S$  для  $n$ -го резонанса:  $C_n^S = C_{n+1}^T$ . Исходя из (2.81) можно ввести определение емкости пьезорезонатора  $C_{0p}$ , представляемого вблизи  $n$ -го резонанса схемой, изображенной на рис. 2.14;  $C_{0p}$  — емкость пьезорезонатора заторможенного по отношению к колебаниям на рассматриваемом резонансе:

$$C_{0p} = C_n^S. \quad (2.82)$$

Тогда

$$C_p^T = \frac{C_{0p}}{1 - k_{\text{эф}}^2}. \quad (2.83)$$

Емкость  $C_{0p}$  по (2.82) — частотно-зависима. Эта зависимость тем сильнее, чем ближе соседние собственные частоты и выше значение  $k_{\text{эф}}$ .

Принимая для компактности записи  $k_{\text{эф},n}^2 = 0$ , из (2.81) можно получить общие выражения для определения  $C_n^S$  и  $C_n^T$ :

$$\left. \begin{aligned} C_n^T &= C^T \prod_{i=0}^{n-1} (1 - k_{\text{эф},i}^2); \\ C_n^S &= C^T \prod_{i=0}^n (1 - k_{\text{эф},i}^2). \end{aligned} \right\} \quad (2.84)$$

Из (2.79) и (2.84) следуют общие соотношения между эффективными и статическими  $k$  коэффициентами электромеханической связи [65]

$$k^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ k_{\text{эф},n} \prod_{i=0}^{n-1} (1 - k_{\text{эф},i}^2) \right]; \quad (2.85)$$

$$1 - k^2 = \sum_{i=0}^{\infty} (1 - k_{\text{эф},i}^2). \quad (2.86)$$

Выражение (2.86) может быть применено для описания связи статического КЭМС ( $k_{in}$ ) какой-либо одномерной моды и эффек-

тивных КЭМСД ( $k_{\text{эф}i}$ ), соответствующих  $i$ -м гармоникам этих мод.

Как следует из (2.86) и (2.84),  $C_{\text{ор}}$  на гармониках одномерных мод с увеличением номера гармоники будет быстро стремиться к величине  $C_0$ , соответствующей точной эквивалентной схеме одномерной моды, например, в случае низкочастотных мод — к значению  $C^T(1 - k_n^2)$ .

Из определения инвариантного коэффициента связи продольных колебаний пьезокерамики  $C^s = C^T(1 - k_{i3}^2)$  и выражений (2.84) следуют удобные соотношения между различными статическими коэффициентами электромеханической связи для резонаторов с сильно отличающимися размерами [84]:

$$\begin{aligned} 1 - k_{i3}^2 &= (1 - k_{31}^2)(1 - k_{31}'^2)(1 - k_t^2); \\ 1 - k_{i3}^2 &= (1 - k_{31}''^2)(1 - k_{31}'''^2)(1 - k_{33}^2); \\ 1 - k_{i3}^2 &= (1 - k_{31}^2)(1 - k_{33}''^2)(1 - k_{31}'''^2). \end{aligned}$$

Для получения приближенных формул численного расчета  $k_{\text{эф}}$  на гармониках одномерных мод следует определить значение  $C_n/C_0$ , например, для схемы, приведенной на рис. 2.15.

Используя равенство  $C_n^T = C_0 + \sum_{i=n}^{\infty} C_i = C_0 \left[ 1 + \sum_{i=n}^{\infty} (C_i/C_0) \right]$  по (2.81), получим

$$k_{\text{эф}n}^2 = \frac{C_n}{C_0 \left( 1 + \sum_{i=n}^{\infty} \frac{C_i}{C_0} \right)}. \quad (2.87)$$

Значение  $C_n/C_0$  может быть определено, если к некоторой функции  $F(\varphi)$  динамической части точного выражения для комплексной проводимости (сопротивления) одномерных мод (см. табл. 2.3) применить разложение на простые дроби [84].

Для мод, у которых можно считать, что отсутствует распределение смещений ( $КН_t$ ,  $КН_p$ ,  $СФ_p$ ), статические и динамические коэффициенты электромеханической связи совпадают. Для мод, у которых гармоники резонансной частоты  $f_s(n)$  либо гармоники антирезонансной частоты  $f_p(n)$  образуют точную нечетную гармоническую последовательность  $n = 1, 3, 5$  при малых коэффициентах электромеханической связи материала, эффективные коэффициенты связи изменяются обратно пропорционально номеру гармоники ( $n = 1, 3, 5$ ). При увеличении КЭМС эта зависимость становится более сложной.

---

**МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОНСТАНТ  
ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ  
И ПАРАМЕТРОВ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ  
РЕЗОНАТОРОВ****§ 3.1. Классификация методов**

При определении констант пьезокерамических материалов обычно имеется в виду возможность определения всего комплекса или отдельных значений упругих, диэлектрических и пьезоэлектрических констант с соответствующими значениями диссипативных характеристик. С этой целью могут быть применены все методы, описываемые в настоящей главе.

Отличие в применении того или иного метода к определению констант пьезоматериала по сравнению с применением к определению параметров пьезорезонатора (ПКЭ или преобразователя) состоит в том, что накладываются довольно жесткие требования на геометрическую форму и соотношение размеров пьезоэлемента, на котором определяются константы материала, а также формулируются требования на условия проведения измерений.

В настоящем параграфе приводится примерная классификация известных методов определения констант пьезоэлектрических материалов и параметров пьезорезонаторов. Под последними в дальнейшем будем подразумевать параметры пьезоэлемента или резонансного преобразователя, как определено в § 2.4.

Основное различие в методах может быть определено временем внешнего воздействия. При этом если время воздействия настолько велико, что длина волны значительно (по крайней мере на два порядка) превышает любой из размеров исследуемого образца, то такие методы следует считать статическими. В этом случае уравнения состояния пьезоэлектрической среды (§ 1.1) справедливы для всего объема испытываемого образца. При этом очевидно, что определяемые статическими методами константы соответствуют изотермическим условиям. В то же время статические методы не могут быть использованы для определения параметров пьезокерамических резонаторов (ПКР).

В динамических методах длина волны используемых колебаний сравнима хотя бы с одним из размеров образца; уравнения состояния пьезоэлектрической среды справедливы только для элементарного объема, измеряемые переменные зависят от координат. При измерениях соблюдаются условия постоянства

энтропии, и определяемые константы являются адиабатическими.

Большинство динамических методов используется для определения динамических констант пьезокерамических материалов и параметров пьезокерамических резонаторов.

Динамические методы можно классифицировать по способам измерения свойств материала или параметров пьезорезонатора (рис. 3.1).

Ниже рассмотрены наиболее широко применяемые динамические методы определения констант пьезокерамических материалов и параметров пьезокерамических резонаторов.

Сведения о статических методах и установках для их реализации можно найти в работах [17, 22, 107].

### § 3.2. Метод резонанса — антирезонанса (Р—А)

Применение метода Р—А для определения констант пьезокерамических материалов. Математической моделью, используемой в методе, служат выражения для комплексной проводимости или сопротивления, полученные из решения электромеханической задачи для случаев одномерных колебаний ПКЭ. Основным допущением модели является пренебрежение всеми видами потерь энергии.

Экспериментально метод основан на измерении частот  $f_s$  и  $f_p$  (см. § 2.4), по которым рассчитываются упругие константы и коэффициент электромеханической связи. Для расчета пьезоконстант проводятся измерения низко- или высокочастотной емкости, определяющей диэлектрические свойства материала. Последние наряду с величинами модуля комплексной проводимости на резонансе используются для определения механической добротности ( $Q_m$ ).

Удобным способом описания метода Р—А служит использование классификации, приведенной в § 2.1, которая выполнена в соответствии с электрическими и механическими граничными условиями, а также выражений для комплексной проводимости или сопротивления из табл. 3.1 и соответствующих данным табл. 2.3. Как показано в [96], к идентичной математической форме можно привести комплексную проводимость для пьезомягких и комплексное сопротивление для пьезожестких мод. В соответствии с этим приводится описание метода Р—А.

**Определение упругих констант.** Пьезомягкие моды. Как следует из табл. 3.1, комплексная проводимость  $Y$  для пьезомягких одномерных мод в общем виде [147]

$$Y = j\omega C_0 \left[ 1 + \frac{k^2}{1 - k^2} I_d(\varphi) \right], \quad (3.1)$$

где  $I_d(\varphi)$  — функция, определяющая динамическую сторону ПКЭ.



Вид функции  $I_d(\varphi)$  и выражения для параметров  $C_0$ ,  $k$ ,  $\varphi$  различных мод колебаний приведены в табл. 3.1.

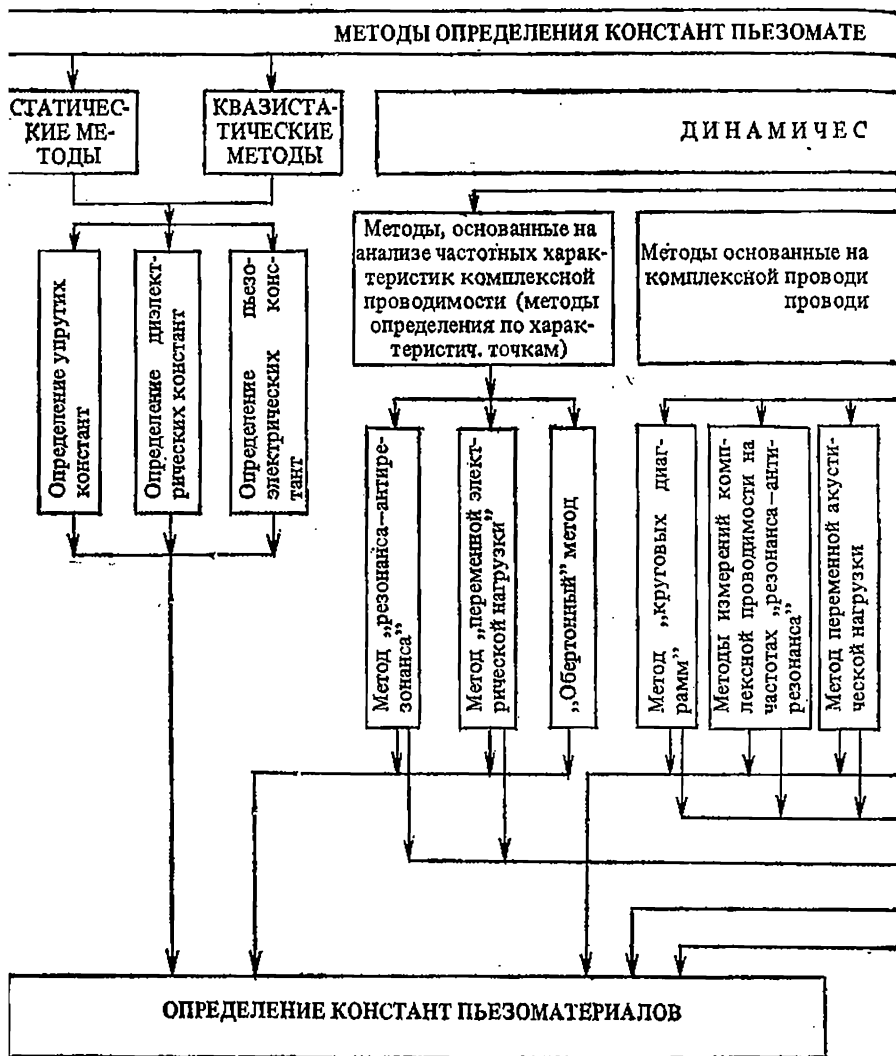
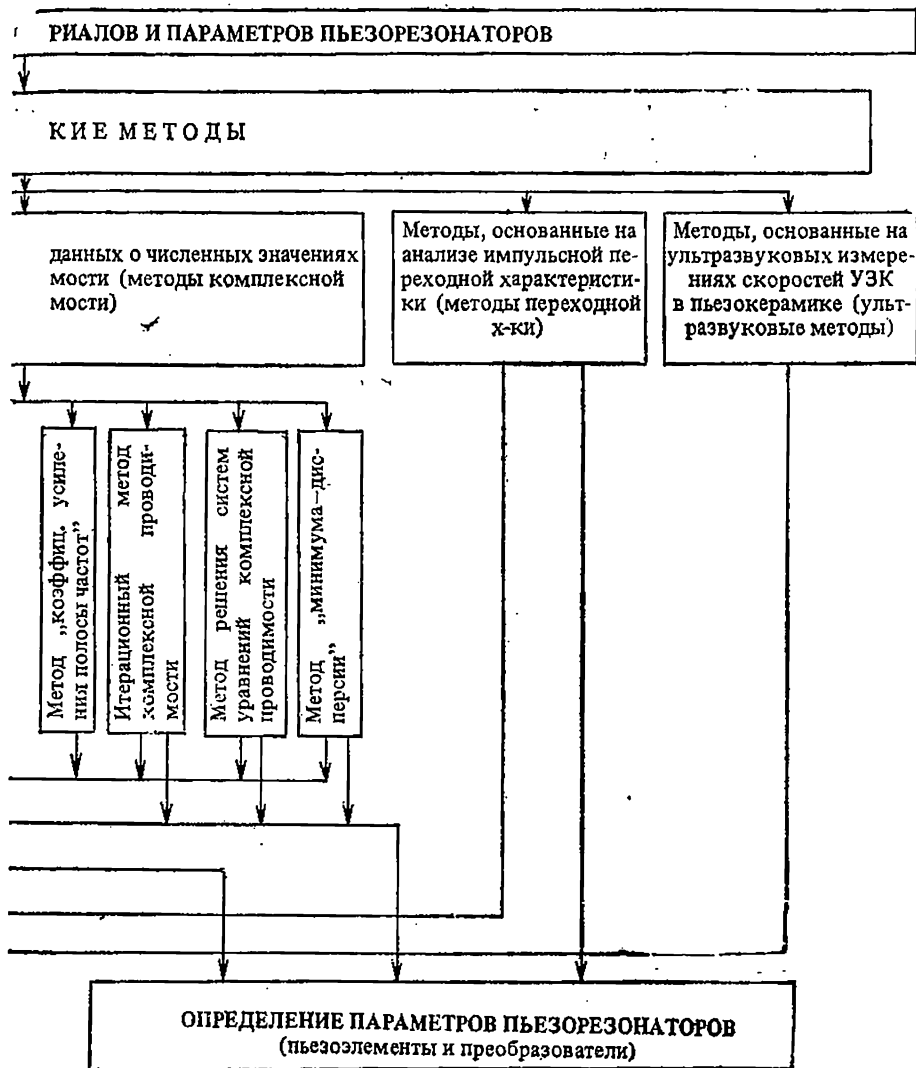


Рис. 3.1. Классификация методов определения констант пьезокерамических

Условию резонанса в (3.1) при пренебрежении потерями соответствует  $Y = \infty$  и, следовательно,

$$I_d(\varphi) = \infty. \quad (3.2)$$

Условие (3.2) используется для определения упругих констант и скорости звука на пьезомягких модах. Оно имеет про-



материалов и параметров пьезокерамических резонаторов.

стую форму для аксиально симметричных мод тонкого кольца ( $КН_t$ ,  $КН_p$ ) и сферически симметричной моды тонкой сферической оболочки ( $СФ_p$ ):  $\omega_s = \omega_0$ , где  $\omega_s$  — угловая частота динамического (последовательного) резонанса,  $\omega_0^2 = 1/a^2 \rho s^2 = v^2/a^2$ ,

Таблица 3.1. Представление параметров одномерных мод колебаний пьезоэлементов для применения метода Р — А

1. Пьезомягкие моды		
1.1. Низкочастотные		
Мода	Комплексная проводимость $Y$	$C_0$
$СН_4$	$Y = \frac{j\omega l \omega}{t} \varepsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \left[ 1 + \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \operatorname{tg} \left( \frac{1}{2} \omega l \sqrt{\rho s_{11}^E} \right) \right]$	$\frac{l \omega}{t} \varepsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2)$
$КН_4$	$Y = \frac{j\omega 2l \omega}{t} \varepsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \left[ 1 + \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \frac{1}{1 - (\omega a \sqrt{\rho s_{11}^E})^2} \right]$	$\frac{2l \omega}{t} \varepsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2)$
$КН_p$		
$СФ_p$	$Y = \frac{j\omega 4\pi a^2}{t} \varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2) \left[ 1 + \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \cdot \frac{1}{1 - \omega a \sqrt{\rho s_{11}^E} (1 - \sigma) \frac{1}{2}} \right]$	$\frac{4\pi a^2}{t} \varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2)$
$ЛН_4$	$Y = \frac{j\omega \pi R^2}{t} \varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2) \left[ 1 + \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \cdot \frac{1 + \sigma}{j_1 [\omega R \sqrt{\rho s_{11}^E} (1 - \sigma^2)] - (1 - \sigma)} \right]$	$\frac{\pi R^2}{t} \varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2)$
$ПС_4 - 1$	$Y = \frac{j\omega l \omega}{t} \varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2) \left[ 1 + \frac{(k'_{31})^2}{1 - (k'_{31})^2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \left( \frac{1}{2} \omega \omega \sqrt{\rho s_{11}^E} (1 - \sigma^2) \right)}{\frac{1}{2} \omega \omega \sqrt{\rho s_{11}^E} (1 - \sigma^2)} \right]$	$\frac{l \omega}{t} \varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2)$

$\Pi C_f - 2$	$Y = \frac{j\omega \eta \epsilon_{33}^T}{l} (1 - k_{33}^2) (1 - k_{31}^{\prime\prime}) \left\{ 1 + \frac{(k_{31}^{\prime\prime})^2}{1 - (k_{31}^{\prime\prime})^2} \operatorname{tg} \left[ \frac{1}{2} \omega \eta \sqrt{\rho s_{11}^E (1 - B^2)} \right] - \frac{1}{2} \omega \eta \sqrt{\rho s_{11}^E (1 - B^2)} \right\}$	$\frac{\omega l}{l} \epsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2) (1 - k_{31}^{\prime\prime})$
---------------	---	---

Моды	k <sup>2</sup>	J <sub>g</sub> (φ)	φ	v
CH <sub>f</sub>	$k_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E (1 - \sigma) \epsilon_{33}^T s_{11}^E}$	tg φ/φ	$\frac{\omega l}{2v_b^E}$	$v_b^E = \frac{1}{\sqrt{\rho s_{11}^E}}$
KH <sub>f</sub>		$\frac{1}{1 - \varphi^2}$	$\frac{\omega a}{v_b^E}$	
KH <sub>p</sub>		$\frac{1}{1 - \varphi^2}$	$\frac{\omega a}{v}$	
Cφ <sub>p</sub>	$k_p^2 = \frac{2d_{31}^2}{s_{11}^E (1 - \sigma) \epsilon_{33}^T}$ $k_p^2 = \frac{2k_{31}^2}{(1 - \sigma)}$	$\frac{1 + \sigma}{j_1(\varphi) - (1 - \sigma)}$ ; $j_1(\varphi) = \frac{\varphi J_0(\varphi)}{J_1(\varphi)}$	$\frac{\omega R}{v}$	$v = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \rho s_{11}^E (1 - \sigma)}}$ $v = \frac{1}{\sqrt{\rho s_{11}^E (1 - \sigma^2)}}$
ЛH <sub>f</sub>		tg φ/φ	$\frac{\omega \omega}{2v}$	
ΠC <sub>f</sub> -1	$k_{31}^{\prime\prime} = \frac{k_{31}^2 \cdot 1 + \sigma}{1 - k_{31}^2} \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma}$	tg φ/φ	$\frac{\omega \omega}{2v}$	$v = \frac{1}{\sqrt{\rho s_{11}^E (1 - \sigma^2)}}$
ΠC <sub>f</sub> -2	$k_{31}^{\prime\prime} = \frac{(k_{31} - B k_{33})^2}{(1 - k_{33}^2) (1 - B^2)}$ ; $B = s_{13}^E / \sqrt{s_{11}^E s_{33}^E}$ ; $k_{33}^2 = d_{33}^2 / (\epsilon_{33}^T s_{33}^E)$	tg φ/φ	$\frac{\omega \omega}{2v}$	$v = \frac{1}{\sqrt{\rho s_{11}^E (1 - B^2)}}$

1.2. Высокочастотные				
Мода	Комплексная проводимость Y	C <sub>0</sub>		
ПВ <sub>t</sub>	$Y = \frac{j\omega t}{l} \varepsilon_{33}^S \left\{ 1 + \frac{(k'_{31})^2}{1 - (k'_{31})^2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \left[ \frac{\omega t}{2} \sqrt{\rho s_{11}^E (1 - \sigma^2) (1 - A^2)} / (1 - B^2) \right]}{\frac{\omega t}{2} \sqrt{\rho s_{11}^E (1 - \sigma^2) (1 - A^2)} / (1 - B^2)} \right\}$	$\frac{\omega t}{l} \varepsilon_{33}^S$		
ЦВ <sub>t</sub>	$Y = \frac{j\omega \pi R^2}{l} \varepsilon_{33}^S \left\{ 1 + \frac{(k'_p)^2}{1 - (k'_p)^2} \cdot \frac{1 + \sigma'}{i_1 \left[ \omega R \sqrt{\frac{\rho s_{11}^E (1 - \sigma^2)^2 (1 - A^2)^2}{(1 - B^2)^2}} \right] - \sqrt{1 - \sigma'}} \right\}$	$\frac{\pi R^2}{l} \varepsilon_{33}^S$		
Мода	K <sup>2</sup>	I <sub>д</sub> (φ)	φ	v
ПВ <sub>t</sub>	$k'_{31}{}''^2 = k_t'^2 = \frac{e_{31}^2}{\varepsilon_{33}^S c_{11}^D}$ $k'_{31}{}''' = \frac{(k_p - A k_{33})}{1 - A^2} - (k_{31} - B k_{33})^2$ $k'_{31}{}'''' = \frac{(k_p - A k_{33})}{1 - k_{33}^2} - (k_{31} - B k_{33})^2$ $A^2 = 2s_{13}^E / [s_{33}^E (s_{11}^E + s_{12}^E)]$	$\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\varphi}$	$\frac{\omega t}{2\sigma}$	$v = \sqrt{\frac{1 - B^2}{\rho s_{11}^E (1 - \sigma^2) (1 - A^2)}} = \sqrt{\frac{c_{11}^E}{\rho}}$

$\Pi B_1$	$k_p^2 = \frac{(k_p - Ak_{33})^2}{(1 - A^2)(1 - k_{33}^2)}$	$\frac{1 + \sigma'}{j_1(\varphi) - \sqrt{1 - \sigma'^2}}$ $j_1(\varphi) = \frac{\varphi J_0(\varphi)}{J_1(\varphi)}$	$\frac{\omega R}{v}$	$v = \sqrt{\frac{1}{\rho_s \epsilon_{11}}} \left[ \frac{1 - B^2}{(1 - \sigma'^2)(1 - A^2)} \right]$ $\sigma' = \frac{\alpha - B^2}{1 - B^2}$
-----------	---	---	----------------------	---

## 2. Пьезоэлектрические моды

### 2. 1. Низкочастотные

Мода	Комплексное сопротивление $Z$	$C_0$
$CH_p$	$Z = \frac{l}{j\omega \pi R^2 \epsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2)} \left[ 1 - k_{33}^2 \frac{\operatorname{tg} \left( \frac{1}{2} \omega l \sqrt{\rho_s D} \right)}{\frac{1}{2} \omega l \sqrt{\rho_s D}} \right]$	$\frac{\omega l}{l} \epsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2)$
$ЦН_p$	$Z = \frac{l}{j\omega \pi R^2 \epsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2)} \left[ 1 - k_{33}^2 \frac{\operatorname{tg} \left( \frac{1}{2} \omega l \sqrt{\rho_s D} \right)}{\frac{1}{2} \omega l \sqrt{\rho_s D}} \right]$	$\frac{\pi R^2}{l} \epsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2)$
$\Pi C_p$	$Z = \frac{\omega}{j\omega l \epsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2)(1 - k_{33}^{*2})} \left\{ 1 - k_{33}^2 \frac{\operatorname{tg} \left[ \frac{1}{2} \omega \omega \sqrt{\rho_s D} (1 - D^2) \right]}{\frac{1}{2} \omega \omega \sqrt{\rho_s D} (1 - D^2)} \right\}$	$\frac{l}{\omega} \epsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2)(1 - k_{33}^{*2})$

Мода	$k^2$	$I_{\Pi}(\varphi)$	$\varphi$	$v$
$CH_p$	$k_{33}^2 = \frac{g_{33}^2 T}{s_{33}^2 E} = \frac{d_{33}^2}{T E s_{33}^2}$	$\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\varphi}$	$\frac{\omega l}{2v}$	$v = \frac{1}{\sqrt{\rho s_{33}}}$
$ЦН_p$	$k_{33}^2 = \frac{g_{33}^2 T}{s_{33}^2 E}$	$\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\varphi}$	$\frac{\omega l}{2v}$	$v = \frac{1}{\sqrt{\rho s_{33}}}$
$ПЦ_p$	$k_{33}^2 = \frac{1}{1 + \frac{T}{s_{33}^2 (1 - k_{31}^2)} (g_{33}^2 - g_{31}^2 s_{11}^2 / s_{11}^2)}$	$\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\varphi}$	$\frac{\omega \omega}{2v}$	$v = \frac{1}{\sqrt{\rho s_{33}^D (1 - D^2)}}$ $D^2 = s_{13}^D / (s_{11}^D s_{33})$

## 2.2. Высоочастотные

Мода	Комплексное сопротивление $Z$	$C_0$
$ПлВ_p$	$Z = \frac{t}{j\omega l \epsilon_{33}^S} \left[ 1 - k_t^2 \frac{\operatorname{tg} \left( \frac{1}{2} \omega t \sqrt{\rho / c_{33}^D} \right)}{\frac{1}{2} \omega t \sqrt{\rho / c_{33}^D}} \right]$	$\frac{\omega l}{t} \epsilon_{33}^S$

$ДВ_p$	$Z = \frac{t}{j\omega\pi R^2 \epsilon_{33}} \left[ 1 - k_1^2 \frac{\operatorname{tg} \left( \frac{1}{2} \omega t \sqrt{\rho/c_{33}^D} \right)}{\frac{1}{2} \omega t \sqrt{\rho/c_{33}^D}} \right]$	$\frac{\pi R^2 \epsilon_{33}}{t}$
$ПлСВ_p$	$Z = \frac{t}{j\omega t \epsilon_{11}^S} \left[ 1 - k_{15}^2 \frac{\operatorname{tg} \left( \frac{1}{2} \omega t \sqrt{\rho/c_{55}^D} \right)}{\frac{1}{2} \omega t \sqrt{\rho/c_{55}^D}} \right]$	$\frac{\omega t \epsilon_{11}^S}{t}$

Мода	$k^2$	$f_{\pi} (\varphi)$	$\varphi$	$\nu$
$ПлВ_p$	$k_1^2 = \frac{k_{33}^2}{\beta_{33}^2 c_{33}^D}$	$\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\varphi}$	$\frac{\omega t}{2\nu}$	$\nu = \sqrt{\frac{c_{33}^D}{\rho}}$
$ДВ_p$	$k_t^2 = \frac{k_{33}^2}{\beta_{33}^2 c_{33}^D}$	$\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\varphi}$	$\frac{\omega t}{2\nu}$	$\nu = \sqrt{\frac{c_{33}^D}{\rho}}$
$ПлСВ_p$	$k_{15}^2 = \frac{k_{15}^2}{\beta_{11}^2 c_{55}^D}$	$\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\varphi}$	$\frac{\omega t}{2\nu}$	$\nu = \sqrt{\frac{c_{55}^D}{\rho}}$



$a$  — средний радиус кольца или сферы;  $\rho$  — плотность пьезокерамики;  $s^E$  — действующая упругая константа;  $v$  — скорость звука.

Отсюда

$$v = \omega_s a; \quad s^E = \frac{1}{a^2 \rho \omega_s^2}. \quad (3.3)$$

Для одномерных линейных мод условие (3.2) имеет вид

$$\operatorname{tg} \varphi = \infty \quad \text{или} \quad \varphi = \frac{\pi}{2}. \quad (3.4)$$

Так как  $\varphi = \omega d / 2v$ , то из (3.4) следует

$$v = 2f_s d; \quad (3.5)$$

$$s^E = (4\rho f_s^2 d^2)^{-1}, \quad (3.6)$$

где  $d$  — резонансный размер.

Для одномерных планарных мод тел вращения условие (3.2) соответствует

$$j_1(\varphi) - (1 - \sigma) = 0, \quad (3.7)$$

где  $j_1 = \varphi J_0(\varphi) / J_1(\varphi)$ ;  $J_0(\varphi)$ ,  $J_1(\varphi)$  — функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка;  $\sigma$  — коэффициент Пуассона.

Трансцендентное уравнение (3.7) решается численными методами при известной величине  $\sigma$ , которая может быть определена по отношению резонансных частот ( $f_{sIV} / f_{sIII}$ ) контурных мод III и IV квадратных пластин (табл. 3.2 [136]) или по отношению резонансных частот радиальной моды диска и контурной моды квадратной пластинки [145].

Таблица 3.2. Определение коэффициента Пуассона  $\sigma$  по отношению резонансных частот ( $f_{sIV} / f_{sIII}$ ) контурных мод III и IV квадратных пластин

$f_{sIV} / f_{sIII}$	1,516 4	1,505 2	1,494 2	1,483 2	1,472 3	1,461 5	1,450 9	1,440 3	1,429 9	1,419 7	1,409 6
$\sigma$ . . . . .	0,25	0,26	0,27	0,28	0,29	0,30	0,31	0,32	0,33	0,34	0,35

Наименьший положительный корень ( $\varphi_1$ ) уравнения (3.7), соответствующий основному резонансу радиальной моды диска  $DH_i$ , в зависимости от  $\sigma$  табулирован (табл. 3.3 [24]). Таким образом, для радиальных мод  $DH_i$  и ЦВ $_i$ :

$$v = \frac{2\pi R}{\varphi_1} f_s; \quad s^E = \frac{\varphi_1^2}{4\pi^2 R^2 f_s^2 \rho}. \quad (3.8)$$

Выражения для определения  $v$  и  $s^E$  пьезомягких мод через измеряемые значения  $f_s$  приведены в табл. 3.4.

Таблица 3.3. Определение коэффициента Пуассона  $\sigma$  в зависимости от корня  $\Phi_1$  уравнения (3.7)

$\sigma$	$\Phi_1$	$\sigma$	$\Phi_1$	$\sigma$	$\Phi_1$	$\sigma$	$\Phi_1$
0,24	2,011 2	0,29	2,042 5	0,33	2,067 3	0,38	2,097 4
0,25	2,017 9	0,30	2,048 8	0,34	2,073 5	0,39	2,104 1
0,26	2,023 8	0,31	2,055 1	0,35	2,079 5	0,40	2,110 9
0,27	2,030 0	0,32	2,061 2	0,36	2,085 5	—	—
0,28	2,036 2			0,37	2,090 5		

Таблица 3.4. Формулы для определения констант пьезокерамики в методе Р — А

1. Пьезомягкие моды				
Мода	1.1. Низкочастотные			
	Упругие характеристики		Диэлектрические константы	
	$\nu$	Упругие константы	Диэлектрические константы	$\text{tg } \delta$
$\text{CH}_t$	$\nu_b^E = 2f_s t$	$s_{11}^E = (4\rho f_s^2 t^2)^{-1}$	$e_{33}^T = C^T \frac{t}{lw}$	$\text{tg } \delta^T$ — измерение на низкой частоте (1 кГц)
$\text{KH}_t$	$\nu_b^E = 2\pi f_s a$	$s_{11}^E = (4\pi^2 \rho f_s^2 a^2)^{-1}$	$e_{33}^T = c^T \frac{t}{2\pi a w} =$ $= C^T \frac{4t}{\pi (L^2 - d^2)}$	
$\text{KH}_p$			$e_{33}^T = c^T \frac{w}{2\pi a t} =$ $= C^T \frac{D - d}{\pi (D + d) t}$	
$\text{CF}_p$	$\nu_c = 2\pi f_s a$	$s_c = \frac{s_{11}^E + s_{12}^E}{2} =$ $= (4\pi^2 \rho f_s^2 a^2)^{-1}$	$e_{33}^T = C^T \frac{t}{4\pi a^2}$	
$\text{DH}_t$	$\nu = \frac{2\pi R}{\Phi_1} f_s$ $\Phi_1$ — наименьший положительный корень уравнения (3.7)	$s_{11}^E - \frac{s_{12}^E}{s_{11}^E} =$ $= s_{11}^E (1 - \sigma^2) =$ $= \frac{\Phi_1^2}{\Phi_1^2 R^2 f_s^2 \rho}$	$e_{33}^T = C^T \frac{t}{\pi R^2}$	

1. Пьезомягкие моды				
Мода	1.1. Низкочастотные			
	Упругие характеристики		Диэлектрические константы	
	$\nu$	Упругие константы	Диэлектрические константы	$\text{tg } \delta$
ПС <sub>1</sub> -1	$\nu = 2f_s \omega$	$s_{11}^E - \frac{s_{12}^E}{s_{11}^E} = (4\rho f_s^2 \omega^2)^{-1}$	$\epsilon_{33}^T = C^T \frac{t}{l \omega}$	$\text{tg } \delta^T$ — измере- ние на низкой частоте (1 кГц)
ПС <sub>1</sub> -2		$s_{11}^E - \frac{s_{13}^E}{s_{33}^E} = (4\rho f_s^2 \omega^2)^{-1}$	$\epsilon_{33}^T = C^T \frac{l}{\omega t}$	

Мода	Пьезоэлектрические характеристики	
	КЭМС ( $k$ )	Пьезоэлектрические константы
CH <sub>1</sub>	$\frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} = \left( \frac{\pi f_p}{2 f_s} \right) \text{tg} \left( \frac{\pi \Delta f}{2 f_s} \right)$ $k_{31}^2 = \left[ 1 - \text{tg} \left( \frac{\pi f_p}{2 f_s} \right) / \left( \frac{\pi f_p}{2 f_s} \right) \right]^{-1}$	$d_{31} = k_{31} \sqrt{\epsilon_{33}^T s_{11}^E} =$ $= \frac{k_{31} t}{2 f_s l} \sqrt{\frac{C^T}{m}}$
KH <sub>1</sub>	$k_{31}^2 = \frac{f_p^2 - f_s^2}{f_p^2}$	$d_{31} = k_{31} \sqrt{\epsilon_{33}^T s_{11}^E} =$ $= \frac{k_{31} t}{4 \pi f_s a} \sqrt{\frac{C^T}{m}}$
KH <sub>p</sub>		$d_{31} = k_{31} \sqrt{\epsilon_{33}^T s_{11}^E} =$ $= \frac{k_{31} \omega}{4 \pi f_s a} \sqrt{\frac{C^T}{m}}$
CФ <sub>p</sub>	$k_p^2 = \frac{f_p^2 - f_s^2}{f_p^2}$	$d_{31} = k_p \sqrt{\frac{1}{2} \epsilon_{33}^T s_{11}^E (1 - \sigma)} =$ $= \frac{k_p t}{4 \pi f_s a} \sqrt{\frac{C^T}{m}}$

Мода	Пьезоэлектрические характеристики	
	КЭМС ( $\kappa$ )	Пьезоэлектрические константы
ДН <sub>t</sub>	$\frac{k_p^2}{1 - k_p^2} = \frac{(1 - \sigma) J_1 \left[ \varphi_1 \left( 1 + \frac{\Delta f}{f_s} \right) \right] - \varphi_1 \left( 1 + \frac{\Delta f}{f_s} \right) J_0 \left[ \varphi_1 \left( 1 + \frac{\Delta f}{f_s} \right) \right]}{(1 + \sigma) J_1 \left[ \varphi_1 \left( 1 + \frac{\Delta f}{f_s} \right) \right]}$	$d_{31} = k_p \sqrt{\frac{1}{2} e_{33}^T s_{11}^E (1 - \sigma)} = \frac{k_p \varphi_1 t}{2\pi f_s R} \sqrt{\frac{C^T}{2(1 + \sigma) m}}$
ПС <sub>t-1</sub>	$k_{31}^2 = \left[ 1 - \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} \frac{f_p}{f_s} \right) / \left( \frac{\pi}{2} \frac{f_p}{f_s} \right) \right]^{-1}$	$d_{31} \sqrt{\frac{1 + \sigma}{1 - k_{31}^2}} = k'_{31} \times \sqrt{e_{33}^T s_{11}^E (1 - \sigma^2)} = \frac{k'_{31} t}{2f_s w} \sqrt{\frac{C^T}{m}}$
ПС <sub>t-2</sub>	$k_{31}^m = \left[ 1 - \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} \frac{f_p}{f_s} \right) / \left( \frac{\pi}{2} \frac{f_p}{f_s} \right) \right]^{-1}$	—

Мода	Производные параметры и константы			Измеряемые параметры
	$\varphi$	Упругие константы	Пьезоэлектрические константы	
СН <sub>t</sub>	$\frac{\pi}{2} \frac{f}{f_s}$	$s_{11}^D = s_{11}^E (1 - k_{31}^2)$	$g_{31} = \frac{d_{31}}{e_{33}^T}$	$f_s, f_p; C^T, \operatorname{tg} \delta^T$ — измерение на низкой частоте (1 кГц)
КН <sub>t</sub>	$\frac{f}{f_s}$	$s_{11}^D = s_{11}^E (1 - k_{31}^2)$		
КН <sub>p</sub>		$\frac{1}{2} (s_{11}^D + s_{12}^D) = s_c^E (1 - k_p^2)$		
СФ <sub>p</sub>				

Мода	Производные параметры и константы			Измеряемые параметры
	$\Phi$	Упругие константы	Пьезоэлектрические константы	
ДН <sub>t</sub>	$\Phi_1 \frac{f}{f_s}$	—	$k_{31}^2 = \frac{1}{2} (1 - \sigma) k_p^2$	$f_s, f_p; C^T, \text{tg } \delta^T$ — — измерение на низкой частоте (1 кГц) $\sigma$ — задается или измеряется другим методом
ПС <sub>t-1</sub>	$\frac{\pi}{2} \frac{f}{f_s}$	—	—	$f_s, f_p; C^T, \text{tg } \delta^T$ — — измерение на низкой частоте (1 кГц)
ПС <sub>t-2</sub>				

1.2. Высокочастотные				
Мода	Упругие характеристики		Диэлектрические характеристики	
	$v$	Упругие константы	Диэлектрические константы	$\text{tg } \delta$
ПВ <sub>t</sub>	$v = 2f_s t$	$\frac{(s_{11}^E - s_{12}^E) [s_{33}^E (s_{11}^E + s_{12}^E) - 2s_{13}^E]}{s_{11}^E s_{33}^E - s_{13}^E{}^2} =$ $= \frac{1}{c_{11}^E} = (4\rho f_s^2 t^2)^{-1}$	$\epsilon_{33}^S = C^S \frac{l}{wt}$	—
ЦВ <sub>t</sub>	$v = \frac{2\pi R}{\Phi_1} f_s$ $\Phi_1$ — наименьший положительный корень уравнения: $f_1(\Phi) - (1 - \sigma')^{1/2} = 0$	$s_{11}^E \left[ \frac{(1 - \sigma^2)(1 - A^2)}{1 - B^2} \right]^2 =$ $= \frac{\Phi_1^2}{4\pi^2 R^2 f_s^2 \rho}$	$\epsilon_{33}^S = C^S \frac{l}{\pi R^2}$	—

Мода	Пьезоэлектрические характеристики	
	КЭМС ( $\kappa$ )	Пьезоэлектрические константы
ПВ <sub>t</sub>	$k_t^{r_2} = k_{31}^{r_2} = \frac{1}{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \frac{f_p}{f_s}\right) / \left(\frac{\pi}{2} \frac{f_p}{f_s}\right)}$	$e_{31} = k_t' \sqrt{\varepsilon_{33}^S c_{11}^D}$
ЦВ <sub>t</sub>	$\frac{k_p^{r_2}}{1 - k_p^{r_2}} = \frac{\sqrt{1 - \sigma'} J_1 [\varphi_1 (1 + \Delta f / f_s)] - \varphi_1 (1 + \Delta f / f_s) J_0 [\varphi_1 (1 + \Delta f / f_s)]}{(1 + \sigma') J_1 [\varphi_1 (1 + \Delta f / f_s)]}$	---

Мода	Производные параметры и константы			Измеряемые параметры
	$\varphi$	Упругие константы	Пьезоэлектрические константы	
ПВ <sub>t</sub>	$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{f}{f_s}$	$c_{11}^D = \frac{c_{11}^E}{(1 - k_t^{r_2})}$	---	$f_s, f_p$ $C^S$ — измерение на высокой частоте
ЦВ <sub>t</sub>	$\varphi_1 \frac{f}{f_s}$	---	---	$f_s, f_p$ $C^S$ — измерение на высокой частоте $\sigma'$ — задается или измеряется другим методом

## 2. Пьезоэлектрические моды

### 2.1. Низкочастотные

Мода	Упругие характеристики		Диэлектрические характеристики	
	$\nu$	Упругие константы	Диэлектрические константы	$\operatorname{tg} \delta$
СН <sub>p</sub>	$\nu_b^D = 2f_p l$	$s_{33}^D = (4\rho f_p^2 l^2)^{-1}$	$\varepsilon_{33}^T = C^T \frac{l}{\omega t}$	$\operatorname{tg} \delta^T$ измерение на низкой частоте ( $f - 1$ кГц)
ЦН <sub>p</sub>			$\varepsilon_{33}^T = C^T \frac{l}{\pi R^2}$	
ПС <sub>p</sub>	$\nu^D = 2f_p \omega$	$s_{33}^D - \frac{s_{13}^D}{s_{11}^D} = (4\rho f_p^2 \omega^2)^{-1}$	$\varepsilon_{33}^T = C^T \frac{\omega}{lf}$	

Мода	Пьезоэлектрические характеристики		
	КЭМС		Пьезоэлектрические константы
	$\kappa$	Расчетная формула	
СН <sub>p</sub>	$k_{33}^2$	$\frac{\pi f_s}{2f_p} / \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \frac{f_s}{f_p}$	$d_{33} = k_{33} \sqrt{\epsilon_{33}^T \epsilon_{33}^E} =$ $= \frac{1}{2f_p} \frac{k_{33}}{\sqrt{1 - k_{33}^2}} \sqrt{\frac{C^T}{m}}$
ЦН <sub>p</sub>	$k_{33}^2$	или $\frac{\pi f_s}{2f_p} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} \frac{\Delta f}{f_p} \right)$	
ПС <sub>p</sub>	$k_{33}^{*2}$	$\Delta f = f_p - f_s$	—

Мода	Производные параметры и константы		Измеряемые параметры
	Упругие константы	Пьезоэлектрические константы	
СН <sub>p</sub>	$s_{33}^E = s_{33}^D (1 - k_{33}^2)$	$g_{33} = d_{33} / \epsilon_{33}^T$	$f_s, f_p$ $C^T$ — измерение на низкой частоте ( $f = 1$ кГц)
ЦН <sub>p</sub>			
ПС <sub>p</sub>	—	—	

2.2. Высокочастотные				
Мода	Упругие характеристики		Диэлектрические характеристики	
	$\nu$	Упругие константы	Диэлектрические константы	$\operatorname{tg} \delta$
ПлВ <sub>p</sub>	$\nu_t^D = 2f_p t$	$c_{33}^D = 4\rho f_p^2 t^2$	$\epsilon_{33}^S = C^S \frac{t}{\omega l}$	—
ДВ <sub>p</sub>			$\epsilon_{33}^S = C^S \frac{t}{\pi R^2}$	
ПлСВ <sub>p</sub>	$\nu_s^D = 2f_p t$	$c_{55}^D = 4\rho f_p^2 t^2$	$\epsilon_{11}^S = c^S \frac{t}{\omega l}$	

Мода	Пьезоэлектрические характеристики		
	КЭМС		Пьезоэлектрические константы
	$\kappa$	Расчетная формула	
ПлВ <sub>p</sub>	$k_t^2$	$\frac{\pi f_s}{2f_p} / \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} \frac{f_s}{f_p} \right)$ или	$h_{33} = k_t \sqrt{\beta_{33}^S c_{33}^D} =$ $= k_t 2f_p \sqrt{\frac{m}{C^S}}$
ДВ <sub>p</sub>	$k_t^2$		
ПлСВ <sub>p</sub>	$k_{15}^2$	$\frac{\pi f_s}{2f_p} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} \frac{\Delta f}{f_p} \right)$ $\Delta f = f_p - f_s$	$h_{15} = k_{15} \sqrt{\beta_{11}^S c_{55}^D} =$ $= k_{15} 2f_p \sqrt{\frac{m}{C^S}}$

Мода	Производные параметры и константы		Измеряемые параметры
	Упругие константы	Пьезоэлектрические константы	
ПлВ <sub>p</sub>	$c_{33}^E = c_{33}^D (1 - k_t^2)$	$e_{33} = h_{33} e_{33}^S$	$f_s, f_p$ $C^S$ — измерение на высокой частоте; $C^T$ — измерение на низкой частоте
ДВ <sub>p</sub>			
ПлСВ <sub>p</sub>	$e_{11}^T = C^T \frac{t}{\omega l}$ $s_{55}^D = \frac{1}{c_{55}^D}$ $s_{55}^E = s_{55}^D (1 - k_{15}^2)$	$k_{15}^2 = 1 - e_{11}^S / e_{11}^T$ $g_{15} = h_{15} s_{55}^D$ $e_{15} = h_{15} e_{11}^S$ $d_{15} = e_{15} e_{55}^E$	

Примечание;  $m$  — масса;  $l$  — длина;  $\omega$  — ширина;  $t$  — толщина;  $a$  — средний радиус;  $\rho$  — плотность; для мод КН<sub>t</sub> и КН<sub>p</sub>:  $D$  — наружный;  $d$  — внутренний диаметр кольца.

Пьезожесткие моды. Комплексное сопротивление пьезожестких мод (см. табл. 3.1)

$$Z = \frac{1}{j\omega C_0} [1 - k^2 I_d(\varphi)]. \quad (3.9)$$

Для определения скорости звука и упругих констант на пьезожестких модах используется условие антирезонанса, соответствующее  $Z = \infty$ , т. е.

$$I_d(\varphi) = \infty. \quad (3.10)$$



Условие (3.10) аналогично (3.2) для пьезомягких мод, однако здесь оно определяется антирезонансной частотой.

Для приведенных в табл. 3.1 пьезожестких мод условие (3.10) преобразуется к виду

$$\operatorname{tg} \varphi = \infty \quad \text{или} \quad \varphi = \frac{\pi}{2}. \quad (3.11)$$

Поскольку  $\varphi = \omega d / 2v$ , из (3.11) получим

$$v = 2f_p d; \quad s^D, \quad \frac{1}{C^D} = \frac{1}{4\rho f_p^2 d^2}, \quad (3.12)$$

где  $v$ ,  $s^D$ ,  $C^D$  соответствующие рассматриваемой моде скорость звука и упругая константа.

Выражения для расчета  $v$  и  $s^D$  или  $C^D$  различных пьезожестких мод через измеряемое значение частоты антирезонанса сведены в табл. 3.4.

**Определение диэлектрических констант.** Непосредственное измерение частот  $f_n$  и  $f_p$  не позволяет определить диэлектрические константы. Для этого привлекаются точечные измерения комплексной проводимости (сопротивления), выполняемые в записи от моды колебаний на низкой или высокой частоте.

Низкочастотные моды. Комплексную проводимость для низкочастотных пьезомягких мод можно представить в виде

$$Y = j\omega C^T [1 - k^2 + k^2 I_D(\varphi)]. \quad (3.13)$$

Для низкочастотных пьезожестких мод

$$Y = \frac{j\omega C^T (1 - k^2)}{[1 - k^2 I_D(\varphi)]}. \quad (3.14)$$

При  $\omega \rightarrow 0$ ,  $I_D(\varphi) \rightarrow 1$  (см. табл. 3.1), тогда значение комплексной проводимости по (3.13) или (3.14) при  $\omega \rightarrow 0$  равно

$$Y|_{\omega \rightarrow 0} = j\omega C^T. \quad (3.15)$$

Выражение (3.15) позволяет определить диэлектрическую проницаемость свободного ПКЭ при измерении емкости на низкой частоте. Измерения проводят мостовыми методами на частотах 100 Гц или 1 кГц. Одновременно измеряется  $\operatorname{tg} \delta^T = \epsilon_{33}^{T''} / \epsilon_{33}^{T'}$ , что может быть учтено комплексной величиной  $C^T = C^{T'} - jC^{T''}$  в (3.15). Условием применения низкочастотных диэлектрических измерений к определению параметров на рабочих частотах служит отсутствие дисперсии комплексной диэлектрической проницаемости.

Высокочастотные моды. Комплексная проводимость для высокочастотных пьезомягких мод

$$Y = j\omega C^S \left[ 1 + \frac{k^2}{1 - k^2} I_D(\varphi) \right]. \quad (3.16)$$

Для высокочастотных пьезожестких мод

$$Y = j\omega C^S / [1 - k^2 I_d(\varphi)]. \quad (3.17)$$

При  $\omega \rightarrow \infty$   $I_d(\varphi) \rightarrow 0$  (см. табл. 3.1). Тогда из (3.16) и (3.17) следует

$$Y|_{\omega \rightarrow \infty} = j\omega C^S. \quad (3.18)$$

Выражение (3.18) позволяет определить диэлектрическую проницаемость зажатого ПКЭ по измерению емкости на высокой частоте, которая должна по крайней мере на порядок превышать основную резонансную частоту высокочастотной моды. Условием применения высокочастотных измерений к определению параметров на рабочих частотах также служит отсутствие дисперсии.

Среднечастотные моды. Для измерений справедливы условия (3.15) и (3.18). Проще использовать (3.15) и данные измерений на низкой частоте.

Выражения для определения диэлектрических констант сведены в табл. 3.4.

**Определение коэффициентов электромеханической связи пьезокерамического материала и пьезоэлектрических констант.** КЭМС материала, определяются по измерениям частот  $f_s$  и  $f_p$ . При известных упругой и диэлектрической константах из коэффициентов связи определяются пьезоконстанты.

**Пьезомягкие моды.** Условие антирезонанса  $Y = 0$  согласно (3.1) приводит к выражению

$$1 + \frac{k^2}{1 - k^2} I_d(\varphi_p) = 0. \quad (3.19)$$

Из (3.19) коэффициент связи определяется по выражениям

$$\frac{k^2}{1 - k^2} = -\frac{1}{I_d(\varphi_p)} \quad \text{или} \quad k^2 = \frac{1}{1 - I_d(\varphi_p)}. \quad (3.20)$$

При определении коэффициентов связи пользуются заменой

$$\frac{f_p}{f_s} = 1 + \frac{\Delta f}{f_s}, \quad (3.21)$$

где  $\Delta f = f_p - f_s$ .

Выражения для определения коэффициентов связи с учетом (3.21) приведены в табл. 3.4.

Расчет коэффициентов связи планарных мод  $DH_t$  и  $ЦВ_t$  требует знания соответствующего коэффициента Пуассона. Зависимость  $k_p = f(\Delta f/f_s)$  для  $\sigma = 0,27 \div 0,38$  приведена на рис. 3.2 [64].

Большую точность, чем рис. 3.2, обеспечивает расчетная формула, приведенная в табл. 3.4.

**Пьезожесткие моды.** Условие резонанса  $Z = 0$  из (3.9) дает

$$1 - k^2 I_d(\varphi_s) = 0. \quad (3.22)$$

На основании (3.12) и табл. 3.1

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \frac{f_s}{f_p}. \quad (3.23)$$

Учитывая, что для пьезожестких мод  $I_d(\varphi) = \operatorname{tg} \varphi_p / \varphi_p$ , из (3.22) и (3.23) получим

$$k^2 = \left( \frac{\pi}{2} \frac{f_s}{f_p} \right) / \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} \frac{f_s}{f_p} \right) = \left( \frac{\pi}{2} \frac{f_s}{f_p} \right) \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} \frac{\Delta f}{f_p} \right), \quad (3.24)$$

где  $\Delta f = f_p - f_s$ .

Пьезоконстанты рассчитываются из коэффициентов электро-механической связи, приведенных в табл. 3.1.

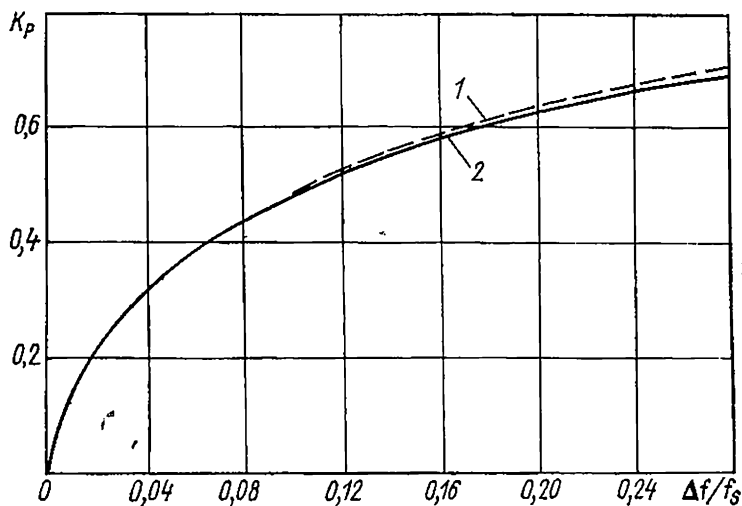


Рис. 3.2. Зависимость  $k_p$  от  $\Delta f / f_s$  [64].

1 —  $\sigma = 0,38$ ; 2 —  $\sigma = 0,27$

Формулы для определения пьезоконстант через измеряемые параметры  $f_{s,p}$  и  $C^{T,S}$  и коэффициенты электро-механической связи материала приведены в табл. 3.4.

**Применение метода Р — А для определения параметров пьезо-керамических резонаторов.** Параметры ПКР определены в § 2.4 как параметры эквивалентной схемы с сосредоточенными постоянными:  $C_{0p}$ ,  $C_1$ ,  $L_1$  и  $R_1$  (рис. 3.3). Измерение частот  $f_s$  и  $f_p$  позволяет рассчитать емкостное отношение

$$r = \frac{C_{0p}}{C_1} = \frac{f_s^2}{f_p^2 - f_s^2} \quad (3.25)$$

и эффективный коэффициент связи [см. (2.78)].

Характеристические частоты при пренебрежении потерями выражаются через параметры резонатора следующим образом:

$$\omega_s = (L_1 C_1)^{-\frac{1}{2}}; \quad \omega_p = \left[ \frac{1}{L_1 C_1} \left( 1 + \frac{C_1}{C_{op}} \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.25a)$$

Емкость заторможенного резонатора (см. § 2.5)

$$C_{op} = C_n^T (1 - k_{\Phi n}^2), \quad (3.26)$$

где  $C_n^T = C^T \prod_{i=0}^{n-1} (1 - k_{\Phi i}^2)$ .

Для основной гармоники низкочастотных одномерных мод

$$C_{op} = C^T (1 - k_{\Phi 0}^2). \quad (3.27)$$

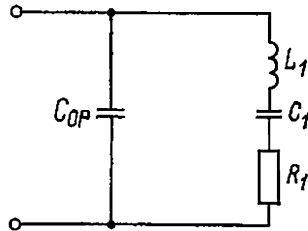
Для гармоник низкочастотных мод

$$C_{op} = C^T \prod_{i=0}^n (1 - k_{\Phi i}^2), \quad (3.28)$$

где  $n$  — номер гармоники,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Выражения для средне- и высокочастотных мод аналогичны (3.27) — (3.28), если все моды достаточно разделены. В этом

Рис. 3.3. Эквивалентная схема пьезо-керамического резонатора.



случае в качестве  $C^T$  для среднечастотных мод необходимо использовать

$$C_c^T = C^T (1 - k_n^2), \quad (3.29)$$

где  $k_n$  — статический коэффициент связи для низкочастотных мод.

Для высокочастотных мод

$$C_b^T = C^T (1 - k_n^2) (1 - k_c^2) = C^T (1 - k_p^2) = \frac{C^S}{(1 - k_b^2)}, \quad (3.30)$$

где  $k_c$ ,  $k_b$  — статические коэффициенты связи средне- и высокочастотных мод;  $k_p$  — статический планарный коэффициент связи.

Для высокочастотных мод  $C_{op}$  можно также определить как

$$C_{op} = \frac{C^S}{\prod_{i=n+1}^{\infty} (1 - k_{\Phi i}^2)}, \quad (3.31)$$

где  $n$  — номер гармоники.

При известной  $C_{0p}$  из  $r$ , определяемого по (3.25), рассчитывают  $C_1$ . Для основной резонансной частоты ( $n = 1$ ) динамическая емкость  $C_1$  определяется выражением

$$C_1 = k_{\text{эф}}^2 C^T. \quad (3.32)$$

Для гармоник одномерных мод

$$C_1 = k_{\text{эф}n}^2 C^T \prod_{l=0}^{n-1} (1 - k_{\text{эф}l}^2). \quad (3.33)$$

Индуктивность  $L_1$  определяется по измеренной  $f_s$  и рассчитанным по (3.32) — (3.33) значениям  $C_1$ .

Определение механической добротности. Механическая добротность пьезокерамического материала

$$Q_M = \frac{s'}{s''}. \quad (3.34)$$

Используются два способа определения  $Q_M$ .

1. Наряду с  $f_s$  и  $f_p$  измеряется модуль комплексной проводимости  $|Y_m|$  на резонансной частоте, а также  $C^T$  (или  $C_0$ ) [24, 64].  $|Y_m|$  (или  $|Z_m|$ ) определяется либо путем замещения ПКР на частоте  $f_s$  переменным резистором, либо измерением входного и выходного напряжений пассивного четырехполюсника на частоте  $f_m$ .

Для основного резонанса одномерных мод

$$Q_M = \frac{1}{2\pi f_s |Z_m| k_{\text{эф}}^2 C^T} = \frac{1}{2\pi f_s C^T} \frac{f_p^2}{(f_p^2 - f_s^2) |Z_m|}, \quad (3.35)$$

где  $C^T$  — соответствующая рассматриваемой моде емкость свободного ПКР [см. (3.29), (3.30)].

Используя определение  $k_{\text{эф}}$ , дадим выражение для  $Q_M$ , справедливое как на основном резонансе, так и на гармониках одномерных мод:

$$Q_M = \frac{1}{2\pi f_s |Z_m| (C_{0p} + C_1)} \frac{f_p^2}{(f_p^2 - f_s^2)} \quad (3.36)$$

или в общем виде

$$Q_M = \frac{1}{2\pi f_s |Z_{mn}| C^T \prod_{l=0}^{n-1} (1 - k_{\text{эф}l}^2)} \frac{f_{pn}^2}{f_{pn}^2 - f_{sn}^2}, \quad (3.37)$$

где  $f_{sn}$  и  $f_{pn}$  — частоты резонанса и антирезонанса  $n$ -й гармоники;  $|Z_{mn}|$  — модуль комплексного сопротивления на  $n$ -й гармонике. (Отметим, что в [24] в выражении для расчета  $Q_M$ , соответствующем (3.35), вместо  $C^T$  используется  $C_0$ .)

2. Измеряются модули комплексной проводимости на частотах  $f_s$  и  $f_p$  [64, 86]  $|Y_m| \approx |Y_s| = \frac{1}{R_1}$ ;  $|Y_n| \approx |Y_p| \approx \omega_p^2 C_{оп}^2 R_1^2$  (см. рис. 2.17)

$$Q_m = r \sqrt{\frac{|Y_m|}{|Y_n|}} \approx \frac{f_s^2}{f_p^2 - f_s^2} \sqrt{\frac{|Y_m|}{|Y_n|}}. \quad (3.38)$$

Выражения (3.35) и (3.38) по точности совпадают [64]. При практических измерениях используют равенство

$$\left| \frac{Y_m}{Y_n} \right| = \left| \frac{U_m}{U_n} \right|, \quad (3.39)$$

где  $U_m$  и  $U_n$  — напряжения, измеряемые на частотах  $f_m$  и  $f_n$  на малом сопротивлении  $R_n$ , включенном последовательно с ПКР. Равенство (3.39) справедливо при  $R_n \rightarrow 0$ . С ростом  $R_n$  погрешность измерения по (3.39) растет пропорционально  $R_n/|Z_m|$ . Кроме того, если при измерении  $U_n$  не принимаются меры для исключения влияния гармоник в спектре сигнала задающего генератора, то это может приводить к его завышению в несколько раз, и следовательно, вызывать существенные погрешности в  $Q_m$  по второму способу.

Таким образом, измерения по (3.38) следует применять, если созданы условия для измерения комплексной проводимости (сопротивления).

При измерениях с помощью пассивного четырехполюсника необходимо использовать выражения (3.35) и (3.37).

Большое значение при измерениях  $Q_m$  приобретают условия закрепления ПКР. Закрепление нужно производить в узловых точках при минимальной площади контакта. Зажимающее устройство должно иметь минимальную массу и максимальную податливость.

**Общая оценка метода Р — А.** Основными достоинствами метода служат: простота и доступность математического и аппаратного обеспечения; высокая точность определения характеристических частот и рассчитываемых по ним упругих констант; удовлетворительная точность определения коэффициентов связи и пьезоконстант при условии  $Q_m^2/r \gg 1$ .

Основные недостатки метода: влияние основного допущения о пренебрежении потерями энергии на точность определения констант пьезокерамики и параметров ПКР; низкая точность определения механической добротности; невозможность определения диэлектрических и пьезоэлектрических потерь на рабочих частотах; невозможность определения диэлектрических констант на рабочих частотах и вследствие этого влияние дисперсии диэлектрической проницаемости на точность определения параметров; трудности применения на средне- и высокочастотных модах; влияние конечных размеров на точность определения констант пьезокерамических материалов и параметров пьезокерамических резонаторов.

### § 3.3. Обертонный метод

Разработан для определения констант пьезоматериалов. Различают две разновидности метода.

**Обертонный метод определения коэффициента Пуассона на радиальной моде диска ДН.** Математическая модель, используемая в методе, — точное решение электромеханической задачи для радиальных колебаний диска в одномерном приближении [144, 146]. Главное допущение — пренебрежение потерями энергии.

Метод базируется на измерении основной резонансной частоты и резонансной частоты первой гармоники (обертон) радиальной моды диска с последующим решением системы двух трансцендентных уравнений относительно упругих констант  $s_{11}^E$  и  $s_{12}^E$  или  $s_{11}^E$  и  $\sigma^E$  [16], либо относительно  $c_{11}^p$  и  $c_{12}^p$  или  $c_{11}^p$  и  $\sigma^p = \sigma^E$  [146].

Используя выражение для комплексной проводимости радиальной моды диска [см. (2.38), § 2.2], рассмотрим условие резонанса, которое в связи с существованием обертонов приводит к системе трансцендентных уравнений.

Условие резонанса  $Y = \infty$  из (2.38) имеет вид

$$j_1(\varphi_n) = 1 - \sigma^E, \quad (3.40)$$

где  $n = 1, 2$  — порядковый номер гармоники. Условие (3.40) — основа обертонного метода определения  $\sigma^E$ .

Определение  $\sigma^E$  из (3.40) проводится двумя способами.

1. Задавая  $\sigma^E$ , численными методами определяют корни  $\varphi_n$  уравнения (3.40), а затем отношение

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{f_{s2}}{f_{s1}}. \quad (3.41)$$

Корни (3.40) и значения (3.41) табулируются в зависимости от  $\sigma^E$ , что позволяет по измеренным  $f_{s1}$  и  $f_{s2}$  определять  $\sigma^E$  (табл. 3.5 [24, 146]).

2. Выражение (3.40) считают системой уравнений вида

$$j_1\left(\frac{f_{sn}}{f_R}\right) = 1 - \sigma^E, \quad (3.42)$$

где  $f_R = \frac{1}{2\pi R} \sqrt{\frac{1}{\rho s_{11}^E (1 - \sigma^{E2})}}$ ;  $f_{sn}$  — значения резонансных частот ( $n = 1, 2$ ).

Тогда уравнение  $j_1(f_{s1}/f_R) = j_1(f_{s2}/f_R)$  решается относительно  $f_R$  и далее из (3.42) определяют  $\sigma^E$ . Последний способ полезен при использовании автоматизированных систем с мини-ЭВМ, когда результаты измерений обрабатываются в процессе эксперимента.

Измерение антирезонансной частоты основного резонанса позволяет применить метод Р — А и, таким образом, определить

Таблица 3.5. Определение коэффициента Пуассона  $\sigma^E$  (мода ДИ<sub>1</sub>) и коэффициентов электромеханической связи материала (пьезожесткие моды) обертонным методом

$\sigma^E = f(f_{s2}/f_{s1})$		$k_{in} = f(f_{sn}/f_{s1})$					
мода ДИ <sub>1</sub>		пьезожесткие моды					
$\sigma^E$	$f_{s2}/f_{s1}$	$\kappa$	$f_{s2}/f_{s1}$	$f_{s3}/f_{s1}$	$\kappa$	$f_{s2}/f_{s1}$	$f_{s3}/f_{s1}$
0	2,895 6	0,00	3,000 0	5,000 0	0,50	3,343 8	5,614 2
0,01	2,884 6	0,01	3,000 1	5,000 1	0,51	3,361 7	5,645 9
0,02	2,873 9	0,02	3,000 4	5,000 7	0,52	3,380 3	5,679 0
0,03	2,863 2	0,03	3,000 9	5,001 7	0,53	3,399 8	5,713 6
0,04	2,852 8	0,04	3,001 7	5,003 1	0,54	3,420 1	5,749 6
0,05	2,842 5	0,05	3,002 7	5,004 8	0,55	3,441 4	5,787 2
0,06	2,832 4	0,06	3,003 9	5,007 0	0,56	3,463 6	5,826 5
0,07	2,822 5	0,07	3,005 3	5,009 5	0,57	3,486 8	5,867 5
0,08	2,812 7	0,08	3,006 9	5,011 5	0,58	3,511 0	5,910 4
0,09	2,803 1	0,09	3,008 3	5,015 8	0,59	3,536 4	5,955 3
0,10	2,793 6	0,10	3,010 9	5,019 6	0,60	3,563 0	6,002 3
0,11	2,784 2	0,11	3,013 2	5,023 7	0,61	3,590 9	6,051 6
0,12	2,775 0	0,12	3,015 7	5,028 3	0,62	3,620 2	6,103 2
0,13	2,766 0	0,13	3,018 5	5,033 3	0,63	3,650 9	6,157 3
0,14	2,757 0	0,14	3,021 5	5,038 7	0,64	3,683 2	6,214 2
0,15	2,748 2	0,15	3,024 7	5,044 6	0,65	3,717 2	6,274 0
0,16	2,739 6	0,16	3,028 2	5,050 8	0,66	3,752 9	6,336 9
0,17	2,731 0	0,17	3,032 0	5,035 7	0,67	3,790 6	6,403 2
0,18	2,722 6	0,18	3,036 0	2,064 7	0,68	3,830 4	6,473 1
0,19	2,714 3	0,19	3,040 2	5,072 3	0,69	3,872 5	6,547 0
0,20	2,706 1	0,20	3,044 7	5,080 4	0,70	3,916 9	6,625 1
0,21	2,698 1	0,21	3,049 5	5,089 0	0,71	3,964 1	6,707 7
0,22	2,690 1	0,22	3,054 5	5,098 0	0,72	4,014 1	6,795 5
0,23	2,682 3	0,23	3,059 8	5,107 6	0,73	4,067 4	6,888 7
0,24	2,674 6	0,24	3,065 4	5,117 6	0,74	4,124 0	6,987 9
0,25	2,667 0	0,25	3,071 3	5,128 2	0,75	4,184 6	7,093 8
0,26	2,659 5	0,26	3,077 5	5,139 3	0,76	4,249 3	7,206 9
0,27	2,652 1	0,27	3,084 0	5,150 9	0,77	4,318 7	7,328 2
0,28	2,644 7	0,28	3,090 8	5,163 1	0,78	4,393 4	7,458 3
0,29	2,637 5	0,29	3,097 0	5,175 8	0,79	4,473 9	7,599 0
0,30	2,630 4	0,30	3,103 3	5,189 1	0,80	4,560 9	7,750 7
0,31	2,623 4	0,31	3,113 1	5,203 1	0,81	4,655 4	7,915 4
0,32	2,616 5	0,32	3,121 2	5,217 6	0,82	4,758 4	8,094 7
0,33	2,609 6	0,33	3,129 7	5,232 8	0,83	4,871 1	8,290 8
0,34	2,602 9	0,34	3,138 0	5,246 7	0,84	4,995 1	8,506 2
0,35	2,596 2	0,35	3,147 8	5,265 2	0,85	5,132 1	8,744 3
0,36	2,589 7	0,36	3,157 6	5,282 4	0,86	5,284 6	9,009 0
0,37	2,583 2	0,37	3,167 5	5,300 4	0,87	5,455 4	9,305 4
0,38	2,576 8	0,38	3,178 0	5,310 1	0,88	5,648 4	9,640 0
0,39	2,570 5	0,39	3,188 0	5,338 0	0,89	5,868 5	10,021 4
0,40	2,564 2	0,40	3,200 9	5,355 0	0,90	6,122 5	10,461 1
0,41	2,558 1	0,41	3,212 2	5,380 0	0,91	6,419 4	10,975 0
0,42	2,557 0	0,42	3,224 5	5,402 0	0,92	6,772 7	11,585 7
0,43	2,546 0	0,43	3,237 4	5,424 9	0,93	7,201 7	12,327 0
0,44	2,540 0	0,44	3,250 8	5,448 8	0,94	7,737 1	13,251 5
0,45	2,534 2	0,45	3,264 7	5,473 6	0,95	8,430 0	14,447 1
0,46	2,528 4	0,46	3,279 2	5,499 3	0,96	9,374 2	16,075 3
0,47	2,522 6	0,47	3,294 4	5,526 4	0,97	10,765 8	18,473 2
0,48	2,517 0	0,48	3,310 2	5,554 5	0,98	13,113 6	22,516 2
0,49	2,511 4	0,49	3,326 6	5,583 7	0,99	18,443 2	31,687 8
0,50	2,505 9	0,50	3,343 8	5,614 2			



все константы на радиальной моде диска. Поэтому обычно излагаемый метод используется как дополнение к методу Р — А на моде ДН<sub>r</sub>.

**Обертоный метод определения коэффициентов электромеханической связи пьезокерамических материалов.** Математическая модель метода — точное решение электромеханической задачи для комплексного сопротивления (проводимости) одномерных мод. Основное допущение — пренебрежение потерями энергии.

Измеряются основная частота и обертоны, что позволяет решить систему трансцендентных уравнений относительно упругой константы и коэффициента связи.

Пьезожесткие моды [148]. Комплексное сопротивление одномерных линейных пьезожестких мод в общем виде

$$Z = \frac{1}{j\omega C_0} \left[ 1 - k^2 \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\varphi} \right]. \quad (3.43)$$

Обертоный метод определения  $k$  на одномерных линейных пьезожестких модах строится на основе условия  $Z = 0$ , и из (3.43)

$$\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{\varphi_n}{k^2}, \quad (3.44)$$

где  $n = 1, 2 \dots$  — номер гармоники.

Выражение (3.44) используется двумя способами.

1. Задавая  $k$ , численными методами определяют корни  $\varphi_n$  уравнения (3.44), а затем отношение

$$\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} = \frac{f_{sn+1}}{f_{sn}}, \quad (3.45)$$

так как

$$\varphi_n = \frac{\pi}{2} \frac{f_{sn}}{f_m}, \quad (3.46)$$

где  $f_m = v/2l$  — частота механического резонанса, соответствующая основной антирезонансной частоте  $f_p$  для пьезожестких мод.

Для определения  $k$  большую надежность дает использование нескольких резонансных частот обертонов и их отношений  $f_{s3}/f_{s1}$ ,  $f_{s4}/f_{s1} \dots$ . Это справедливо для высокочастотных мод, для которых влияние конечных размеров сказывается на обертонах слабее, чем на основном резонансе.

Данные для расчета  $k$  также приведены в табл. 3.5. Их можно использовать для определения  $k$  на любой пьезожесткой моде, указанной в табл. 2.3. Хотя использование обертоного метода для низкочастотных пьезожестких мод связано с усилением влияния конечных размеров, применение его на модах СН<sub>p</sub> и ЦН<sub>p</sub> может быть оправдано в связи с сильным влиянием паразитных реактивностей на антирезонансную частоту.

2. Считая (3.44) системой уравнений с корнями ( $\varphi_n$ ), представленными по (3.46), получаем относительно  $f_m$

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} \frac{f_{s1}}{f_m} \right) = \frac{f_{s1}}{f_{s2}} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} \frac{f_{s2}}{f_m} \right). \quad (3.47)$$

Определив численным методом из (3.47)  $f_m$ , по (3.44) находят  $k$

При применении на высокочастотных модах гармонике низкочастотных мод могут искажать частоты  $f_s$  и  $f_p$ , что затрудняет использование оберточного метода. Сделать измерения более надежными позволяет симметричная нагрузка ПКЭ, как показано

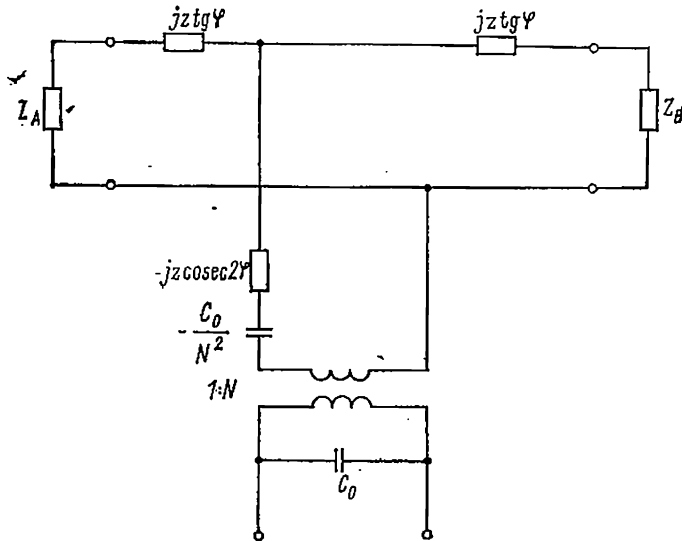


Рис. 3.4. Эквивалентная схема нагруженного пьезокерамического элемента на высокочастотной моде колебаний.

в [141] для случая толщинных мод  $\text{ПлВ}_p$  или  $\text{ДВ}_p$ . Акустическая нагрузка существенно демпфирует гармоники низкочастотных мод на частотной характеристике комплексной проводимости и позволяет однозначно определять резонансные частоты.

Условие резонанса, которое может быть получено из выражения для комплексной проводимости эквивалентной схемы нагруженного ПКЭ для случая высокочастотных мод (рис. 3.4), имеет вид

$$k^2 = \frac{\varphi}{\operatorname{tg} \varphi} - \varphi \frac{\left[ \left( \frac{Z_A + Z_B}{Z} \right)^2 - 4 \frac{Z_A Z_B}{Z} \right] \operatorname{tg} \varphi}{\left( \frac{Z_A + Z_B}{Z} \right)^2 + 4 \operatorname{tg}^2 \varphi}, \quad (3.48)$$

где  $Z_A$ ,  $Z_B$  — механические импедансы на сторонах  $A$  и  $B$ ;  $Z$  — ПКЭ и импеданс пьезокерамики соответственно.

Выражение (3.48) аналогично (3.44) при условии

$$Z_A = R_A; Z_B = R_B \text{ и } R_A = R_B. \quad (3.49)$$

Выражение (3.49) служит условием применения оберточного метода на нагруженных ПКЭ, работающих на высокочастотных модах.

Пьезомягкие моды. Комплексная проводимость высокочастотных пьезомягких мод (см. табл. 3.1)

$$Y = j\omega C^S \left[ 1 + \frac{k^2}{1 - k^2} I_n(\varphi) \right]. \quad (3.50)$$

Для применения оберточного метода на пьезомягких модах используется условие антирезонанса, которое с учетом (3.50) имеет вид

$$-I_n(\varphi_n) = \frac{1 - k^2}{k^2}. \quad (3.51)$$

Для моды ПВ<sub>i</sub> (3.51) принимает вид

$$-\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{\varphi_n (1 - k^2)}{k^2}, \quad (3.52)$$

где  $\varphi_n = (\pi/2) f_{pn}/f_s$ .

Для определения  $k$  можно также решить уравнение

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} \frac{f_{p1}}{f_s} \right) = \frac{f_{p1}}{f_{p2}} \left( \frac{\pi}{2} \frac{f_{p2}}{f_s} \right)$$

относительно  $f_s = 1/2t \sqrt{c_{11}^E/\rho}$ , а затем по (3.52) найти  $k$ .

Измерение  $C^S$  на высокочастотных модах может выполняться методом двойной резонансной частоты [141].

**Общая оценка оберточного метода.** Расширяет возможности метода Р — А. При этом на моде ДН<sub>i</sub> метод позволяет измерить коэффициент Пуассона, а на высокочастотных модах — ослабить трудности, связанные с неоднозначностью в определении частот  $f_s$  и  $f_p$ .

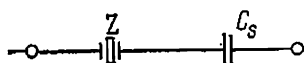
Недостатки метода аналогичны недостаткам метода Р — А, кроме того, для оберточного метода характерны: более сложный математический аппарат, повышенные требования к соотношению размеров при использовании на низкочастотных модах, более жесткие ограничения на влияние потерь при определении оберточных частот, а также влияние частотной зависимости упругих констант на точность результатов.

### § 3.4. Метод переменной электрической нагрузки

Методами переменной электрической нагрузки будем называть все известные методы, по которым измерение констант материала или параметров пьезокерамических резонаторов выполняется путем подключения к ПКЭ или ПКР известной электрической нагрузки.

Ниже приводится характеристика метода для случая последовательной емкостной нагрузки [147]. Математическая модель, используемая в методе, — выражение для комплексного сопротивления последовательной цепочки пьезорезонатор — емкость  $C_s$  (рис. 3.5). Допущения: 1) приближенное представление комплексной проводимости механической стороны при определении констант пьезокерамических материалов; 2) пренебрежение всеми видами потерь в пьезорезонаторе, а также диэлектрическими потерями емкости нагрузки.

Рис. 3.5. Последовательное соединение: пьезорезонатор  $z$  — емкость  $C_s$ .



По данному методу измеряется сдвиг резонансной частоты  $\Delta f = f_{sc} - f_s$  при подключении последовательно с ПКР заданной емкости  $C_s$ . Используя линейную (в первом приближении) связь между  $F_s/\Delta f$  и  $C_s$ , определяют значения емкости заторможенного ПКР  $C_{op}$  и динамической емкости  $C_1$  или КЭМС и емкости  $C_0$ .

**Определение констант пьезокерамических материалов.** В рассматриваемом случае последовательной емкостной нагрузки определение констант наиболее удобно для пьезомягких мод.

Для схемы, приведенной на рис. 3.5, условие резонанса (потерями пренебрегаем) имеет вид

$$Y + j\omega C_s = 0. \quad (3.53)$$

Комплексная проводимость для пьезомягких мод (см. табл. 3.1) определяется выражением (3.1). Параметр  $\varphi$  находится из соотношения

$$\varphi = \varphi_1 \frac{f}{f_s}, \quad (3.54)$$

где  $f$  — текущая частота;  $\varphi_1$  — наименьший положительный корень частотного уравнения для рассматриваемой моды колебаний (табл. 3.6).

В методе используется приближенное представление  $I_d(\varphi)$  в окрестности первого полюса [147]:

$$I_d(\varphi) = \frac{C_{-1}}{\eta} + C + C_1\eta + C_2\eta^2 + \dots \simeq \frac{C_{-1}}{\eta} + C, \quad (3.55)$$

где  $\eta = (\varphi - \varphi_1)/\varphi_1$  — отклонение нормализованной частоты.

Первые два члена ряда (3.55) с удовлетворительной точностью описывают окрестность основного резонанса. Они определяются расчетным путем (см. табл. 3.6).

Используя (3.1), (3.53), (3.55), получаем

$$\frac{1}{\eta} = \frac{f_s}{\Delta f} = \frac{1}{-C_{-1}} \left( \frac{1}{k^2} - 1 + C \right) + \frac{1}{-C_{-1}} \frac{\frac{1}{k^2} - 1}{C_0} C_s. \quad (3.56)$$

Таблица 3.6. Параметры для применения метода переменной электрической нагрузки [147]

Мода	C.	$\kappa^2$	$I_D(\varphi)$	$\varphi_1$	$C_{-1}$	C
$CH_t$	$\frac{I\omega}{t} \frac{T}{\epsilon_{33}} (1 - k_{31}^2)$	$k_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{T E \epsilon_{33}^2 s_{11}^2}$	$\frac{tg \varphi}{\varphi}$	$\frac{\pi}{2}$	-0,405	0,405
$PC_t - 1$	$\frac{I\omega}{t} \frac{T}{\epsilon_{33}} (1 - k_p^2)$	$k_{31}^2 = \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma}$	$\frac{tg \varphi}{\varphi}$	$\frac{\pi}{2}$	-0,405	0,405
$PC_t - 2$	$\frac{\omega t}{l} \epsilon_{33}^2 (1 - k_{33}^2) (1 - k_{31}^{\prime\prime 2})$	$k_{31}^{\prime\prime 2} = \frac{(k_{31} - B k_{33})^2}{(1 - k_{33}^2) (1 - B^2)}$ $B = s_{13}^E / \sqrt{s_{11}^E E}$ $k_{33}^2 = d_{33}^2 / (\epsilon_{33} s_{33}^T E)$	$\frac{tg \varphi}{\varphi}$	$\frac{\pi}{2}$	-0,405	0,405
$PB_t$	$\frac{\omega t}{l} \epsilon_{33}^S$	$k_t' = \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}^2 s_{11}^2} = k_{31}^{\prime\prime 2} =$ $= \frac{(k_p - A k_{33})^2}{1 - A^2} - (k_{31} - B k_{33})^2$ $= \frac{1 - k_{33}^2 - (k_{31} - B k_{33})^2}{1 - k_{33}^2 - (k_{31} - B k_{33})^2}$ $A^2 = 2s_{13}^E / [s_{33}^E (s_{11}^E + s_{12}^E)]$	$\frac{tg \varphi}{\varphi}$	$\frac{\pi}{2}$	-0,405	0,405

$KH_p$	$\frac{2\pi a \omega}{f} e_{33}^T (1 - k_{31}^2)$	$k_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{T E} e_{33}^T s_{11}$	$(1 - \varphi^2)^{-1}$	1	-0,5	0,25
$KH_t$	$\frac{2\pi a \omega}{f} e_{33}^T (1 - k_{31}^2)$	$k_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{T E} e_{33}^T s_{11}$	$(1 - \varphi^2)^{-1}$	1	-0,5	0,25
$C\Phi_p$	$\frac{4\pi a^2}{f} e_{33}^T (1 - k_p^2)$	$k_p^2 = \frac{2d_{31}^2}{s_{11}^E (1 - \sigma)} e_{33}^T$ $k_p^2 = \frac{2k_{31}^2}{(1 - \sigma)}$	$(1 - \varphi^2)^{-1}$	1	-0,5	0,25
$ДН_t$	$\frac{\pi R^2}{f} e_{33}^T (1 - k_p^2)$	$k_p^2 = \frac{2d_{31}^2}{s_{11}^E (1 - \sigma)} e_{33}^T$ $k_p^2 = \frac{2k_{31}^2}{1 - \sigma}$	$\frac{1 + \sigma}{i_1(\varphi) - (1 - \sigma)}$	2,049 для $\sigma = 0,3$ (см. табл. 3.3)	-0,395	0,426
$ЦВ_t$	$\frac{\pi R^2}{f} e_{33}^S$	$k_p^2 = \frac{(k_p - A k_{33})^2}{(1 - A^2)(1 - k_{33}^2)}$	$\frac{1 + \sigma'}{i_1(\varphi) - (1 - \sigma')^{1/2}}$	2,19 для $\sigma' = 0,544$	-0,377	0,459

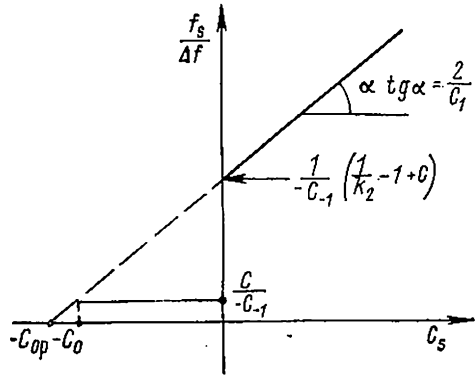
Примечание.  $\varphi = \frac{\omega d}{2v}$ ;  $\sigma = -s_{12}^E/s_{11}^E$ ;  $\sigma' = (\sigma - B^2)/(1 - B^2)$ ;  $i_1(\varphi) = \varphi J_0(\varphi)/J_1(\varphi)$ ;  $d$  — резонансный размер.

Уравнение (3.56) является основой метода переменной электрической нагрузки для случая последовательной емкостной нагрузки на пьезомягких модах. Оно представляет собой линейную зависимость обратного относительного отклонения нормализованной частоты  $\eta$  от величины  $C_s$  (рис. 3.6). Точка пересечения графика с осью ординат дает значение  $k$

$$\left. \frac{f_s}{\Delta f} \right|_{C_s=0} = -\frac{1}{C_{-1}} \left( \frac{1}{k^2} - 1 + C \right), \quad (3.57)$$

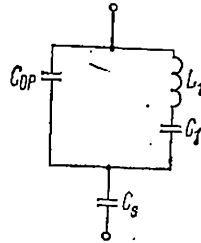
а величина  $f_s/\Delta f = C/(-C_{-1})$  соответствует  $C_s = -C_0$ .

Рис. 3.6. Зависимость  $f_s/\Delta f$  от емкости нагрузки  $C_s$ .



Таким образом, значение резонансной частоты при отсутствии емкости  $C_s$  определяет упругую константу или скорость звука (см. табл. 3.4), а измерение сдвига резонансной частоты

Рис. 3.7. Эквивалентная схема пьезокерамического резонатора без потерь с нагрузочной емкостью.



при подключении ряда известных  $C_s$  позволяет определить  $k$  и  $C_0$  без проведения низкочастотных диэлектрических измерений и измерений  $f_p$ .

**Определение параметров пьезокерамического резонатора.** Комплексная проводимость ПКР (рис. 3.7)

$$Y = j\omega C_{op} - j\omega C_1 / \left( \frac{\omega^2}{\omega_s^2} - 1 \right), \quad (3.58)$$

где  $\omega_s = (L_1 C_1)^{-1/2}$  — частота динамического резонанса. Выражая  $\omega^2/\omega_s^2 - 1$  через  $\eta = \Delta f/f_s$ :  $\omega^2 - \omega_s^2/\omega_s^2 = \eta^2 + 2\eta$ , и принимая, что

при  $\Delta f \ll f_s$  будет  $f + f_s \approx 2f_s$ , из условия резонанса (3.53) с учетом (3.58) получаем

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{C_1}{C_{0p} + C_s}} - 1 \approx \frac{1}{2} \left( \frac{C_1}{C_{0p} + C_s} \right) \quad (3.59)$$

или

$$\frac{f_s}{\Delta f} = 2 \frac{C_{0p}}{C_1} + \frac{2}{C_1} C_s. \quad (3.60)$$

Уравнение (3.60), подобно (3.56), отражает линейную зависимость между  $C_s$  и  $1/\eta$ , график которой аналогичен графику, представленному на рис. 3.6. Из (3.60) следует, что  $C_1$  определяется из графика по тангенсу угла наклона прямой  $1/\eta = f(C_s)$ :

$$\text{tg } \alpha = \frac{2}{C_1}, \quad (3.61)$$

а точка пересечения графика с осью абсцисс отвечает выражению  $C_s = -C_{0p}$ .

Таким образом, наряду с измерением  $f_s$  без емкости  $C_s$  график рис. 3.6 позволяет определить все параметры ПКР, исключая параметры, определяющие потери энергии.

**Общая оценка метода переменной электрической нагрузки.** Важным преимуществом метода переменной электрической нагрузки является определение  $C_0$  в области частот вблизи основной резонансной частоты. Это исключает дисперсионные погрешности в определении диэлектрических констант, обусловленные низко- или высокочастотными диэлектрическими измерениями.

Недостатки метода: понижение точности измерений ввиду пренебрежения потерями энергии в пьезокерамике и диэлектрическими потерями в емкости  $C_s$ ; невозможность определения параметров, определяющих потери энергии в пьезокерамике; зависимость точности определения параметров от величины  $k$ , а также от точности измерения  $C_s$ ; влияние конечного соотношения размеров ПКР на значения измеряемых параметров в связи с использованием одномерных моделей.

### § 3.5. Метод круговых диаграмм

Метод круговых диаграмм относится к первым динамическим методам, основанным на измерениях комплексной проводимости. Математической моделью, используемой в методе, служит выражение для комплексной проводимости (сопротивления) ПКР. Упругие и диэлектрические потери учитываются посредством частотно-независимых эквивалентных сопротивлений  $R_1$  и  $R_0$ . Резонатор представляется эквивалентной схемой с сосредоточенными постоянными (см. рис. 2.14). Пьезоэлектрические потери не рассматриваются.

Основные допущения — справедливость эквивалентной схемы ПКР и условие постоянства вектора комплексной проводимости



электрической стороны

$$Y_0 = \frac{1}{R_0} + j\omega C_{0p} = \text{const}$$

в рассматриваемом диапазоне частот.

По данному методу комплексная проводимость (сопротивление) измеряется на ряде частот (20—30 точек), достаточном для построения круговой диаграммы типа, приведенного на

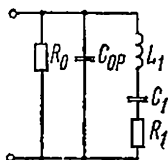


Рис. 3.8. Эквивалентная схема для импеданса пьезокерамического резонатора.

рис. 2.17. По характеристическим точкам на диаграмме рассчитывают константы пьезоматериала или параметры ПКР.

**Определение констант пьезокерамических материалов.** Наиболее удобной в обработке является круговая диаграмма комп-

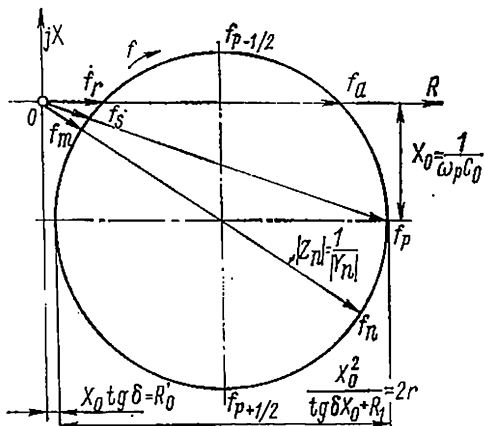


Рис. 3.9. Круговая диаграмма комплексного сопротивления.

лексной проводимости ПКР, закономерности построения которой приведены в § 2.4.

С позиций точного определения частоты  $f_p$  и проверки точности расчета емкости  $C_{0p}$  целесообразно использовать круговую диаграмму комплексного сопротивления. Показано [28], что комплексное сопротивление ПКР, представленного рис. 3.8, характеризуется круговой диаграммой, показанной на рис. 3.9.

Использование диаграммы позволяет более точно определить частоту параллельного резонанса  $f_p$ , которая соответствует условию

$$X|_{f=f_p} = \omega_p L_1 - \frac{1}{\omega_p C_1} - \frac{1}{\omega_p C_{0p}} = 0. \quad (3.62)$$

При этом

$$Z|_{f=f_p} = X_0 \operatorname{tg} \delta + \frac{X_0^2}{X_0 \operatorname{tg} \delta + R_1} - jX_0. \quad (3.63)$$

Таким образом, круговые диаграммы комплексной проводимости (см. рис. 2.17) и комплексного сопротивления позволяют более точно определить частоты последовательного  $f_s$  и параллельного  $f_p$  резонансов. Значения этих частот могут быть использованы для определения упругих констант и коэффициентов связи материала на одномерных модах по расчетным формулам, приведенным в табл. 3.4.

Из диаграммы, приведенной на рис. 2.17, а, следует, что  $C_{0p} = B_s / \omega_s$ . Аналогично из диаграммы, показанной на рис. 2.17, б, получаем  $C_{0p} = (\omega_p X_0)^{-1}$ . Однако в обоих случаях определение  $C_{0p}$  ненадежно вследствие высокого частотного градиента  $\Delta B / \Delta f$  или  $\Delta X / \Delta f$  в областях частот  $f_s$  и  $f_p$ . Из диаграммы комплексной проводимости можно видеть также, что для частот  $f_{s-1/2}$  и  $f_{s+1/2}$ , на которых  $G_d = B_d$ :

$$B_{s-\frac{1}{2}} + B_{s+\frac{1}{2}} = 2B_s, \quad (3.64)$$

откуда определяется  $C_{0p}$ .

Показано [15, 61], что, представляя механические потери в виде эквивалентного частотно-независимого сопротивления потерь  $R_1$ , для любых двух точек круговой диаграммы с  $G_1 = G_2$  можно получить

$$C_{0p} = \frac{B_1 + B_2}{\omega_1 + \omega_2}. \quad (3.65)$$

Ввиду того, что на частотах  $f_{s-1/2}$  и  $f_{s+1/2}$   $G_d = B_d = 1/2G_{ds}$ , то согласно определению  $Q_m$  вычисляется по характеристическим точкам круговой диаграммы

$$Q_m = \frac{f_s}{f_{s+\frac{1}{2}} - f_{s-\frac{1}{2}}}. \quad (3.66)$$

Принимаемое равенство  $\operatorname{tg} \delta$ , измеряемого на низкой частоте, диэлектрическим потерям, соответствующим резонансной частоте [94], приводит к существенным дисперсионным погрешностям.

**Определение параметров пьезокерамических резонаторов.** Параметры ПКР (см. рис. 3.8) легко определяются из соотношений, приведенных на круговых диаграммах, представленных на рис. 2.17, а и рис. 3.9, и выражения (3.66) для определения  $Q_m$ .

Хотя представление комплексной проводимости в виде круговой диаграммы справедливо при условии  $Q^2/r = M^2r \gg 1$ , приводимые в табл. 3.7 выражения для определения параметров ПКР справедливы в широком диапазоне значений  $M^2r$ . Для этого достаточно определить величины  $f_{s-1/2}$ ,  $f_s$ ,  $f_{s+1/2}$ ,  $G_s$  и  $B_s$  из круговой диаграммы комплексной проводимости или  $f_{p-1/2}$ ,  $f_p$ ,  $f_{p+1/2}$ ,  $R_0$  и  $X_0$  из диаграммы комплексного сопротивления.

Таблица 3.7. Выражения для определения параметров пьезорезонатора методом круговых диаграмм

Параметры	Расчетные соотношения	
	Из круговой диаграммы комплексной проводимости	Из круговой диаграммы комплексного сопротивления
$C_{0p}$	$B_s/\omega_s$	$(\omega_p X_0)^{-1}$
$R_0$ или $\text{tg } \delta$	—	$\text{tg } \delta = R'_0/X_0$
$R_1$	$G_s^{-1}$	$\frac{X_0^2}{R_0 - R'_0} - R'_0 \approx \frac{X_0^2}{R_0}$
$Q_M$	$\omega_s/\Delta\omega_s$	—
$C_1$	$\frac{\Delta\omega_s}{\omega_s} G_s$	$C_0 C / (C_0 - C)$
$L_1$	$(\Delta\omega_s G_s)^{-1}$	$R/\Delta\omega_p$

Примечания. 1. Выражения, составляющие строку таблицы представляют равенства, например,  $C_{0p} = B_s/\omega_s = (\omega_p X_0)^{-1}$ .

2.  $\Delta\omega_s = \omega_{s+1/2} - \omega_{s-1/2}$ ;  $C = \frac{\Delta\omega_p}{\omega_p^2 R}$ ;  $\Delta\omega_p = \omega_{p+1/2} - \omega_{p-1/2}$ ;  $R = \frac{X_0^2}{R_0 - R'_0}$ .

**Общая оценка метода.** Достоинства метода: позволяет определить значения всех характеристических частот, включая  $f_p$ ,  $f_s$ ; и параметры электрической стороны на рабочих частотах; обладает относительно высокой точностью определения  $Q_M$  и  $R_1$ .

Недостатки метода: сложность измерительной техники и высокая трудоемкость при использовании ручных измерительных мостов; невозможность определения пьезоэлектрических потерь и низкая точность определения диэлектрических потерь; низкая точность определения  $C_{0p}$ ; влияние конечного соотношения размеров в связи с использованием одномерных моделей.

### § 3.6. Метод коэффициента усиления ширины полосы частот

Метод коэффициента усиления ширины полосы частот\* предназначен для определения пьезоэлектрических констант пьезо-

\* GBW-метод [131].

керамических материалов и может рассматриваться как дополнение к методу круговых диаграмм для более надежного определения упругих и пьезоэлектрических констант.

В качестве математической модели метод использует представление активной составляющей комплексной проводимости (сопротивления) на резонансной (антирезонансной) частоте, которое следует из решения электромеханической задачи об одномерных колебаниях ПКЭ с учетом упругих потерь в виде комплексного значения упругой константы в аргументе  $\varphi$  функции  $I_d(\varphi)$ , описывающей динамическую сторону.

Допущение, используемое в методе, — пренебрежение диэлектрическими и пьезоэлектрическими потерями. Такое допущение практически не сказывается на применении метода на пьезомягких модах, где активная составляющая комплексной проводимости в области частот  $\omega_{s-1/2} - \omega_{s+1/2}$  определяется в основном упругими потерями.

Для реализации метода проводят измерения комплексной проводимости (сопротивления) в области частот  $\omega_{s-1/2} \div \omega_{s+1/2} (\omega_{p-1/2} \div \omega_{p+1/2})$ , на основании которых для расчета пьезоконстант определяются значения частот половинной мощности, резонансной  $f_s$  (антирезонансной  $f_p$ ) частоты и активной составляющей комплексной проводимости (сопротивления) на частоте  $f_s$  ( $f_p$ ).

Пьезомягкие моды. Активная составляющая комплексной проводимости динамической стороны для пьезомягких мод на резонансной частоте связана с величиной механической добротности. На электрической стороне эта связь выражается через коэффициент электромеханической трансформации. Благодаря этому появляется возможность рассчитать пьезоэлектрическую константу по величине  $G_s$ , если известны  $Q_m$  и  $f_s$ .

Покажем связь  $G_s$  с  $Q_m$ . Для этого представим комплексную проводимость (см. табл. 2.3) в виде, показанном в табл. 3.8. Для мод колебаний, представленных в таблице, комплексная проводимость динамической стороны  $Y_d$  описывается функцией  $\operatorname{tg} \varphi$ .

На частоте  $f_s$  при  $s = s' - js''$  и  $Q = s'/s'' \gg 1$

$$\operatorname{tg} \varphi |_{f=f_s} \cong -j \frac{4Q}{\pi}. \quad (3.67)$$

Тогда комплексная проводимость, например, для моды  $CH_i$ , на частоте  $f_s$  равна

$$Y |_{f=f_s} = j\omega C_0 + \omega C_0 \operatorname{tg} \delta_E + \frac{8\omega d_{31}^2}{(\rho s_{11}^E)^{1/2} s_{11}^E i \pi} Q, \quad (3.68)$$

где  $\operatorname{tg} \delta_E = e_0''/e_0'$ ,  $e_0 = e_{33}^T (1 - k_{31}^2)$ .

В (3.68) упругие потери учитываются только в аргументе  $\operatorname{tg} \varphi$ . В множителе  $2\omega d_{31}^2 / [(\rho s_{11}^E)^{1/2} s_{11}^E i]$  влияние упругих и пьезо-потерь не учитывается.

Таблица 3.8. Представление комплексной проводимости  $Y$  пьезоэлементов для

Моды колебаний		$Y, Z$	$C_0$	$\epsilon_0$
электрическое состояние	обозначение моды			
Пьезомягкие	$CH_t$	$Y = j\omega C_0 + Y_d$	$\frac{l\omega}{t} \epsilon_0$	$\epsilon_{33}^T - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E}$
	$PC_t - 1$	$Y = j\omega C_0 + Y_d$	$\frac{l\omega}{t} \epsilon_0$	$\epsilon_{33}^T - \frac{2d_{31}^2 (1 + \sigma)^2}{s_{11}^E (1 - \sigma^2)}$
	$PB_t$	$Y = j\omega C_0 + Y_d$	$\frac{\omega l}{t} \epsilon_0$	$\epsilon_{33}^S$
Пьезожесткие	$CH_p$	$Z = \frac{1}{j\omega C_0} - Z_d$	$\frac{\omega l}{t} \epsilon_0$	$\epsilon_{33}^T - \frac{d_{33}^2}{s_{33}^E}$
	$ПлВ_p$	$Z = \frac{1}{j\omega C_0} - Z_d$	$\frac{\omega l}{t} \epsilon_0$	$\epsilon_{33}^S$
	$ПлСВ_p$	$Z = \frac{1}{j\omega C_0} - Z_d$	$\frac{\omega l}{t} \epsilon_0$	$\epsilon_{11}^S$

Таблица 3.9. Выражения для определения GBW-ко

Параметры	Моды		
	Пьезомягкие		
	$CH_t$	$PC_t - 1$	$PB_t$
$g_s, r_p$	$g_s = \frac{8d_{31}^2 \omega}{t l \rho (s_{11}^E)^2}$	$g_s = \frac{8d_{31}^2 (1 + \sigma)^2 l}{t \omega \rho [s_{11}^E (1 - \sigma^2)]^2}$	$g_s = \frac{8e_{31}^2 l}{\rho \omega t}$
Пьезо-константы	$d_{31}^2 = \frac{t l \rho (s_{11}^E)^2}{8 \omega} G_s \Delta \omega_s$	$d_{31}^2 = \frac{t \omega \rho [s_{11}^E (1 - \sigma^2)]^2}{8 (1 + \sigma)^2 l} G_s \Delta \omega_s$	$e_{31}^2 = \frac{t \omega \rho}{8 l} G_s \Delta \omega_s$

или комплексного сопротивления  $Z$  некоторых мод колебаний  
применения GBW-метода

$Y_{л}, Z_{л}$	$I_{л}(\varphi)$	$\varphi$	$s, c$
$l \frac{2d_{31}^2 \omega}{ts_{11}^E \sqrt{\rho s_{11}^E}} I_{л}(\varphi)$	$\text{tg } \varphi$	$\frac{1}{2} \omega l \sqrt{\rho s_{11}^E}$	$s_{11}^E$
$j \frac{2d_{31}^2 (1 + \sigma)^2 l}{ts_{11}^E (1 - \sigma^2) \sqrt{\rho s_{11}^E (1 - \sigma^2)}} I_{л}(\varphi)$	$\text{tg } \varphi$	$\frac{1}{2} \omega \omega \sqrt{\rho s_{11}^E (1 - \sigma^2)}$	$s_{11}^E (1 - \sigma^2)$
$j \frac{2e_{31}^2 l}{\sqrt{c_{11}^E \rho \omega}} I_{л}(\varphi)$	$\text{tg } \varphi$	$\frac{1}{2} \omega t \sqrt{\rho / c_{11}^E}$	$c_{11}^E$
$-j \frac{2g_{31}^2}{\omega^2 \omega t s_{33}^D \sqrt{\rho s_{33}^D}} I_{л}(\varphi)$	$\text{tg } \varphi$	$\frac{1}{2} \omega l \sqrt{\rho s_{33}^D}$	$s_{33}^D$
$-j \frac{2h_{33}^2}{\omega^2 \omega l \sqrt{\rho c_{33}^D}} I_{л}(\varphi)$	$\text{tg } \varphi$	$\frac{1}{2} \omega t \sqrt{\frac{\rho}{c_{33}^D}}$	$c_{33}^D$
$-j \frac{2h_{15}^2}{\omega^2 \omega l \sqrt{\rho c_{55}^D}} I_{л}(\varphi)$	$\text{tg } \varphi$	$\frac{1}{2} \omega t \sqrt{\frac{\rho}{c_{55}^D}}$	$c_{55}^D$

эффицентов ( $g_s, r_p$ ) и пьезоконстант в GBW-методе

колебаний		
Пьезоэлектрические		
СН <sub>p</sub>	ПлВ <sub>p</sub>	ПлСВ <sub>p</sub>
$r_p = \frac{8g_{33}^2 l}{\pi^2 \omega t s_{33}^D}$	$r_p = \frac{8h_{33}^2 t}{\pi^2 \omega l c_{33}^D}$	$r_p = \frac{8h_{15}^2 t}{\pi^2 \omega l c_{55}^D}$
$g_{33}^2 = \frac{\pi^2 \omega t s_{33}^D}{8l} R_p \Delta \omega_p$	$h_{33}^2 = \frac{\pi^2 \omega l c_{33}^D}{8t} R_p \Delta \omega_p$	$h_{15}^2 = \frac{\pi^2 \omega l c_{55}^D}{8t} R_p \Delta \omega_p$

Пренебрегая диэлектрическими потерями и учитывая, что  $Q = \omega_s / \Delta\omega_s (\Delta\omega_s = \omega_{s+1/2} - \omega_{s-1/2})$  получают

$$\operatorname{Re} Y|_{f=f_s} = G_s = \frac{8\omega d_{31}^2}{\rho l (s_{11}^E)^2} \frac{1}{\Delta\omega_s}. \quad (3.69)$$

Обозначая  $g_s = (8\omega d_{31}^2) / [\rho l (s_{11}^E)^2]$ , имеем [131]

$$g_s = G_s \Delta\omega_s. \quad (3.70)$$

Выражение (3.70) аналогично используемому в теории усилителей определению коэффициента усиления полосы частот, что и дало название методу. Это выражение — основа GBW-метода определения пьезоконстант на пьезомягких модах.

Формулы определения констант из (3.70) для различных мод колебаний приведены в табл. 3.9.

Пьезожесткие моды. Для пьезожестких мод аналогичное (3.67) выражение справедливо для антирезонансной частоты  $\operatorname{tg} \varphi|_{f=f_p} \simeq -j4Q/\pi$ . Комплексное сопротивление на  $f_p$

$$Z|_{f=f_p} = -j \frac{1}{\omega C_0} + \frac{\operatorname{tg} \delta_E}{\omega C_0} + r_p \frac{1}{\Delta\omega_p}. \quad (3.71)$$

Пренебрегая диэлектрическими потерями, из (3.71) для пьезоконстант на пьезожестких модах имеем

$$r_p = R_p \Delta\omega_p, \quad (3.72)$$

где  $R_p = \operatorname{Re} Z|_{f=f_p}$ ;  $\Delta\omega_p = \omega_{p+1/2} - \omega_{p-1/2}$ ;  $r_p$  — для различных мод представлено в табл. 3.9.

Формулы для определения пьезоконстант, полученные по (3.72), также приведены в табл. 3.9.

**Учет нелинейных эффектов.** В [131] предложен способ исключения влияния нелинейных эффектов при определении констант пьезокерамики. Используется сравнение ширины полос  $\Delta\omega_{s1} = \omega_s - \omega_{s-1/2}$  и  $\Delta\omega_{s2} = \omega_{s+1/2} - \omega_s$ . Если  $\Delta\omega_{s1} = \Delta\omega_{s2}$ , считается, что испытательный уровень напряжения  $U$  ниже уровня нелинейности. Если же

$$\Delta\omega_{s2} > 1,1 \Delta\omega_{s1}, \quad (3.73)$$

то следует выполнить проверку снижением уровня испытательного напряжения на возможность перехода уровня линейности. Такие рекомендации основаны на том, что нелинейные эффекты приводят к увеличению упругой податливости  $s$  [76]. При этом частоты  $\omega_{s-1/2}$ ,  $\omega_s$  и  $\omega_{s+1/2}$  снижаются. Но поскольку амплитуда колебаний, а следовательно, и влияние нелинейных эффектов выше на  $\omega_s$ , снижение ее больше по сравнению с частотами  $\omega_{s-1/2}$  и  $\omega_{s+1/2}$ , что и дает критерий (3.73) для оценки присутствия нелинейных эффектов.

**Общая оценка метода.** Основным достоинством метода служит определение пьезоконстант независимо от диэлектрических констант и разности частот  $\Delta f = f_p - f_s$ .

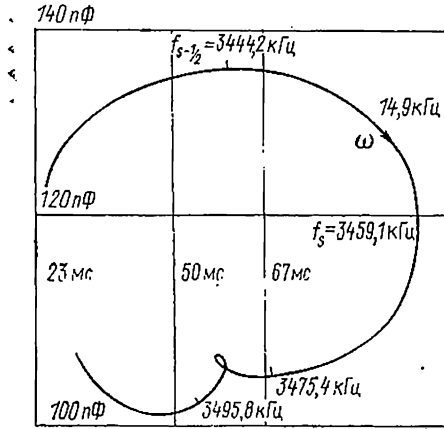
Расширение области применения метода может быть достигнуто при учете диэлектрических потерь. Для этого в формулах (3.70) и (3.72) необходимо использовать соответственно

$$G_{gs} = G_s - G_{zs} \quad \text{и} \quad R_{dp} = R_p - R_{zp}, \quad (3.74)$$

где  $G_{zs} = \omega_s C_0 \operatorname{tg} \delta_E$ ;  $R_{zp} = \operatorname{tg} \delta_E / \omega_p C_0$ .

Так как метод не позволяет определять  $\operatorname{tg} \delta_E$  на рабочей частоте, то при использовании данных низкочастотных измерений в (3.74) могут возникать существенные погрешности при применении метода на слабых резонансах ( $M < 3$ ). При измерениях

Рис. 3.10. Круговая диаграмма комплексной проводимости с паразитным резонансом в области частоты  $f_{s+1/2}$  [131].



на средне- или высокочастотных модах влияние гармоник низкочастотных мод может не позволить определить частоты  $\omega_{s-1/2}$  или  $\omega_{s+1/2}$  (рис. 3.10 [131]). Тогда метод применяется с учетом, что  $\Delta\omega_s = 2(\omega_s - \omega_{s-1/2})$  или  $\Delta\omega_s = 2(\omega_{s+1/2} - \omega_s)$ .

Недостатки метода: невозможность определения диэлектрических констант на рабочих частотах, а также диэлектрических и пьезоэлектрических потерь; малый объем получаемой информации; высокая трудоемкость измерений; влияние конечного соотношения размеров.

### § 3.7. Метод решения систем уравнений комплексной проводимости

Метод [96] предназначен для точного определения комплексных констант пьезокерамических материалов при измерениях на ПКЭ с соотношением размеров, в достаточной степени удовлетворяющим условиям возникновения одномерных мод колебаний. Математической моделью служит точное решение электромеханической задачи об одномерных колебаниях ПКЭ с учетом всех видов потерь энергии. В случае пьезомягких мод используется



решение для комплексной проводимости, в случае пьезожестких — для комплексного сопротивления.

Для реализации метода на нескольких частотах (минимум трех) резонансной области измеряются действительные и мнимые части комплексной проводимости ПКР. Результаты этих измерений используются при решении системы уравнений комплексной проводимости. Система строится таким образом, что каждое из ее уравнений связывает измеренное значение комплексной проводимости с ее теоретическим выражением через соответствующие комплексные константы пьезокерамики. Определение последних осуществляется в результате решения системы.

В табл. 3.10 приведены точные решения для комплексной проводимости пьезомягких и комплексного сопротивления пьезожестких мод.

Как указывалось в § 1.4, различные виды диссипации энергии в пьезокерамическом материале можно учесть, вводя комплексное представление компонент тензоров упругих, диэлектрических и пьезоконстант. Используя матричную форму записи, можно, например, компоненты тензоров  $s_{mn}$ ,  $e_{ij}$  и  $d_{im}$  представить как

$$s_{mn} = s'_{mn} - js''_{mn}; \quad e_{ij} = e'_{ij} - je''_{ij}; \quad d_{in} = d'_{in} - id''_{in}. \quad (3.75)$$

Таким образом, в связи с учетом всех видов диссипации, все константы пьезокерамики, входящие в выражения табл. 3.10, необходимо считать комплексными. Как видно из таблицы, в простейшем случае одномерных колебаний ПКЭ выражение для комплексной проводимости (или сопротивления) можно привести к каноническому виду типа

$$I = I_c + jN^2 I_d. \quad (3.76)$$

При применении (3.76) для комплексной проводимости (пьезомягкие моды)

$$I = Y = G + jB; \quad I_c = j\omega C_0. \quad (3.77)$$

Для комплексного сопротивления (пьезожесткие моды):

$$I = Z = R + jX; \quad I_c = (j\omega C_0)^{-1}. \quad (3.78)$$

Выражения для  $I$ ,  $I_d$ ,  $N^2$ ,  $C_0$ , используемых в (3.76) — (3.78), приведены в табл. 3.10.

На базе (3.76) строится система уравнений, связывающая измеряемые в резонансной области значения комплексной проводимости  $Y_k = G_k + jB_k$  или комплексного сопротивления  $Z_k = R_k + jX_k$  с их модельными представлениями в соответствии с данными табл. 3.10.

Например, для комплексной проводимости

$$Y_k = j\omega_k C_0 + jN^2 Y_{dk}, \quad (3.79)$$

где  $k = 1, 2, 3$ .

Т а б л и ц а 3.10. Представление комплексной проводимости  $Y$  или комплексного сопротивления  $Z$  некоторых мод колебаний пьезоэлементов для применения метода решения систем уравнений комплексной проводимости

Моды колебаний	$Y$ или $Z$	$C_0$
ДН <sub>1</sub>	$Y_k = \frac{j\omega_k \pi R^2}{t} \left[ e_{33}^T - \frac{2d_{31}^2}{s_{11}^E (1-\sigma)} \right] +$ $+ j \frac{2\omega_k \pi R^2 d_{31}^2}{t s_{11}^E (1-\sigma)} \left[ \frac{(1+\sigma) J_1(\varphi_k)}{\varphi_k J_0(\varphi_k) - (1-\sigma) J_1(\varphi_k)} \right]$	$\frac{\pi R^2}{t} \left[ e_{33}^T - \frac{2d_{31}^2}{s_{11}^E (1-\sigma)} \right]$
СН <sub>1</sub>	$Y_k = \frac{j\omega_k t \omega \left( e_{33}^T - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E} \right) + j \frac{2\omega d_{31}^2 \operatorname{tg} \left[ \frac{1}{2} \omega_k t (\rho s_{11}^E)^{1/2} \right]}{(\rho s_{11}^E)^{1/2} s_{11}^E t}}$	$\frac{t \omega \left( e_{33}^T - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E} \right)}{t}$
СН <sub>p</sub>	$i l \left( \beta_{33}^T + \frac{g_{33}^2}{D_{333}} \right) \frac{2g_{33}^2 \operatorname{tg} \left[ \frac{1}{2} \omega_k l (\rho s_{33}^D)^{1/2} \right]}{\omega_k \omega t} + j \frac{2\omega t \omega_k^2 (\rho s_{33}^D)^{1/2} D_{333}}{\omega_k^2 \omega \left( c_{330}^D \right)^{1/2} s_{33}}$	$t \omega \left( \beta_{33}^T + \frac{g_{33}^2}{D_{333}} \right)$
ПлВ <sub>p</sub>	$Z_k = - \frac{i l \beta_{33}^T}{\omega_k t \omega} + j \frac{2h_{33}^2 \operatorname{tg} \left[ \frac{1}{2} \omega_k l \left( \frac{\rho}{c_{33}^D} \right)^{1/2} \right]}{\omega_k^2 t \omega \left( c_{330}^D \right)^{1/2}}$	$\frac{t \omega}{t \beta_{33}^T}$
ПлСВ <sub>p</sub>	$Z_k = - \frac{i t \beta_{11}^S}{\omega_k t \omega} + j \frac{2h_{15}^2 \operatorname{tg} \left[ \frac{1}{2} \omega_k l \left( \frac{\rho}{c_{55}^D} \right)^{1/2} \right]}{\omega_k^2 t \omega \left( c_{550}^D \right)^{1/2}}$	$\frac{t \omega}{t \beta_{11}^S}$

Моды колебаний	$N^2$	$\Phi_k$	$I_{Дк}$	$I_k$	Кон-станты
Преземьяткие	$\frac{2\pi R^2 (1 + \sigma) d_{31}^2}{t s_{11}^E (1 - \sigma)}$	$\omega_k R [s_{11}^E (1 - \sigma^2)]^{1/2}$	$\frac{\omega_k I_1(\Phi_k)}{\Phi_k I_0(\Phi_k) - (1 - \sigma) I_1(\Phi_k)}$	$Y_k = i\omega_k C_0 + IN^2 I_{Дк}$	$\varepsilon_{11}^E \quad s_{12}^E \quad \varepsilon_{33}^T$ $d_{31}$
		$\frac{2\omega d_{31}^2}{(\rho s_{11}^E)^{1/2} s_{11}^E t}$	$\text{tg } \Phi_k$		$s_{11}^E \quad \varepsilon_{33}^T \quad d_{31}$
Презожесткие	$\frac{2g_{33}^2}{\omega t (\rho s_{33}^D)^{1/2} s_{33}^D}$	$\frac{\omega_k I (\rho s_{33}^D)^{1/2}}{2}$	$\frac{\text{tg } \Phi_k}{\omega_k}$	$Z_k = (i\omega_k C_0)^{-1} + IN^2 I_{Дк}$	$s_{33}^D \quad \beta_{33}^T \quad g_{33}$
		$\frac{2h_{33}^2}{t\omega (\rho c_{33}^D)^{1/2}}$			$D_{33} \quad \beta_{33}^s = h_{33}$
ПлСВр	$\frac{2h_{15}^2}{t\omega (\rho c_{55}^D)^{1/2}}$	$\frac{\omega_k t \left(\frac{\rho}{c_{55}^D}\right)^{1/2}}{2}$			$c_{55}^D \quad \beta_{11}^s = h_{15}$

Примечание.  $l$  — длина;  $\omega$  — ширина;  $t$  — толщина;  $\rho$  — плотность пьезокерамики;  $s_{mn}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $d_{in}$  — определяются по (3.75);  $c_{mn}^D = c_{mn}^{D'} + i c_{mn}^{D''}$  — упругие жесткости при постоянной индукции  $D$ ;  $\sigma$  — коэффициент Пуассона;  $h_{in} = h'_{in} \pm i h''_{in}$ ,  $g_{in} = g'_{in} \pm i g''_{in}$  — пьезоконстанты;  $\beta_{ij}^s = \beta_{ij}^{s'} + i \beta_{ij}^{s''}$  — диэлектрическая непроницаемость при постоянной деформации  $S$ .

Положим, что в области частот  $\omega_1 - \omega_3$ , где измерены  $Y_k$ , входящие в (3.79), все константы матриц (3.75) частотно-независимы. В этом случае (3.79) представляет систему линейных уравнений относительно  $C_0$  и  $N^2$ . Исключая эти параметры, имеем:

для комплексной проводимости

$$(Y_1 - Y_2 \gamma_{12})(I_{\pi 2} - I_{\pi 3} \gamma_{23}) = (Y_2 - Y_3 \gamma_{23})(I_{\pi 1} - I_{\pi 2} \gamma_{12}); \quad (3.80)$$

для комплексного сопротивления

$$(Z_1 \gamma_{12} - Z_2)(I_{\pi 2} \gamma_{23} - I_{\pi 3}) = (Z_2 \gamma_{23} - Z_3)(I_{\pi 1} \gamma_{12} - I_{\pi 2}), \quad (3.81)$$

где  $\gamma_{12} = \omega_1/\omega_2$ ;  $\gamma_{23} = \omega_2/\omega_3$ .

Существенно, что уравнения (3.80) — (3.81) независимы от пьезо- и диэлектрических констант, связывая функционально выражаемые через  $I_{dk}$  комплексные упругие константы с измеряемыми значениями  $I_k$ .

Для точного определения комплексной упругой константы необходимо выполнить измерения комплексной проводимости на частотах, где вклад в нее со стороны комплексной проводимости динамической стороны наиболее существен, т. е. в области резонансной частоты.

Уравнения (3.80) — (3.81) наряду с приводимыми в табл. 3.11 выражениями, составляют основу рассматриваемого метода.

Решение трансцендентных уравнений (3.80) или (3.81) возможно выполнить численными методами, в частности методом оптимального поиска сопряженных градиентов Флетчера — Ривса [127]. Для этого строится целевая функция  $F^2$  в виде

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2, \quad (3.82)$$

где  $F_1$  и  $F_2$  получены путем разделения действительной и мнимой частей в (3.80) или (3.81)

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \Delta I'_{12} \Delta I'_{\pi 23} + \Delta I''_{12} \Delta I''_{\pi 23} - \Delta I'_{\pi 23} \Delta I'_{\pi 12} - \Delta I''_{\pi 23} \Delta I''_{\pi 12}; \\ F_2 &= \Delta I''_{12} \Delta I'_{\pi 23} - \Delta I'_{12} \Delta I''_{\pi 23} - \Delta I''_{\pi 23} \Delta I'_{\pi 12} + \Delta I'_{\pi 23} \Delta I''_{\pi 12}. \end{aligned} \right\} \quad (3.83)$$

Значения параметров, входящих в (3.83), приведены в табл. 3.12 для мод колебаний ПКЭ, указанных в табл. 3.10.

Для построенной согласно (3.82) и (3.83) целевой функции известно, что ее значение в точке минимума равняется нулю.

С точки зрения топографии целевой функции оптимизацию для одномерных линейных мод ПКЭ ( $CH_t$ ,  $CH_p$ ,  $PlB_p$ ,  $PlCB_p$ ) удобно проводить по переменным

$$x_1 = (f'_s)^{-1}; \quad x_2 = (f''_s)^{-1}. \quad (3.84)$$

Для радиальной моды диска оптимизация проводится по переменным

$$x_1 = (f_{sR})^{-2}; \quad x_2 = (\Phi_{sR}/f_2^2); \quad x_3 = \sigma'/f_2^2; \quad x_4 = \sigma''/f_2^2. \quad (3.85)$$



в направлении колебаний пьезоэлемента ( $C_0$ ), диэлектрических коэффициентов связи ( $k_{in}$ ) пьезокерамических материалов

$k_{in}$	$d_{in}, g_{in}, h_{in}$
$k_p^2 = \frac{Y_2 \gamma_{12} - Y_1}{Y_2 \gamma_{12} [1 - (1 + \sigma) P_1] - Y_1 [1 - (1 + \sigma) P_2]}$	$d_{31} = \frac{1}{R} \left[ \frac{t s_{11}^E (1 - \sigma) (Y_2 \gamma_{12} - Y_1)}{j 2\pi (1 + \sigma) (\gamma_{12} P_2 - P_1)} \right]^{\frac{1}{2}}$
$k_{31}^2 = \frac{Y_2 \gamma_{12} - Y_1}{Y_2 \gamma_{12} \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\varphi_1}\right) - Y_1 \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{\varphi_2}\right)}$	$d_{31} = \frac{t}{4l} \left[ \frac{(Y_2 \gamma_{12} - Y_1) f_s^{-3}}{j m (\gamma_{12} \operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1)} \right]^{\frac{1}{2}}$
$k_{33}^2, k_i^2, k_{15}^2 = \frac{\gamma_{12} Z_2 - Z_1}{\gamma_{12} Z_2 \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\varphi_1} - Z_1 \frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{\varphi_2}}$	$g_{33} = \frac{\omega l}{4l} \left[ \frac{\omega_1 \omega_2 (Z_2 - \gamma_{12} Z_1) f_p^{-3}}{j m (\gamma_{12} \operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1)} \right]^{\frac{1}{2}}$ $h_{33}, h_{15} = \left[ \frac{\omega_1 \lambda_2 (Z_2 - \gamma_{12} Z_1) m f_p}{j (\gamma_{12} \operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1)} \right]^{\frac{1}{2}}$

обходим оптимальный выбор частот, на которых выполняется измерение комплексной проводимости. Для этого можно воспользоваться критерием, например [132]:

$$f_1 \leq f_s - \frac{2f_s}{\pi} \arcsin \frac{1}{\sqrt{Q}};$$

$$f_2 \geq f_s + \frac{2f_s}{\pi} \arcsin \frac{1}{\sqrt{Q}},$$

где  $f_1$  и  $f_2$  — частоты измерения комплексной проводимости;  $f_s$  — частота последовательного резонанса;  $Q$  — механическая добротность.

С целью определения всех констант матриц (3.75) для пьезокерамики можно использовать различные комбинации измерений на модах колебаний, указанных в табл. 3.10.

**Общая оценка метода.** Основные достоинства: позволяет определить все виды диссипации энергии в пьезокера-

Таблица 3.12. Параметры для расчета  $F_1$  и  $F_2$ , определяемых уравнениями (3.83)

Параметры	Мода колебаний				
	ДН <sub>l</sub>	СН <sub>l</sub>	СН <sub>p</sub>	Плн <sub>p</sub>	ПлСВ <sub>p</sub>
$\Delta J'_{kl}$	$\Delta J'_{12} = G_1 \gamma_{12} - C_2$ $\Delta J'_{23} = G_2 - G_3 \gamma_{23}$	$G_k - G_l \gamma_{kl}$		$\Delta J'_{12} = \gamma_{12}^2 (R_1 - \gamma_{21} R_2)$ $\Delta J'_{23} = R_2 - R_3 \gamma_{32}$	
$\Delta J''_{kl}$	$\Delta J''_{12} = B_1 \gamma_{21} - B_2$ $\Delta J''_{23} = B_2 - B_3 \gamma_{23}$	$B_k - B_l \gamma_{kl}$		$\Delta J''_{12} = \gamma_{12}^2 (X_1 - \gamma_{21} X_2)$ $\Delta J''_{23} = X_2 - X_3 \gamma_{32}$	
$\Delta J'_{пл kl}$	$A_k - A_l$		$A_k - A_l \gamma_{kl}$		
$\Delta J''_{пл kl}$	$D_k - D_l$		$D_k - D_l \gamma_{kl}$		
$A_{k,l}$	$a_{k,l} (a_{k,l}^2 + b_{k,l}^2)^{-1}$		$\sin \varphi'_{k,l} (\cos \varphi'_{k,l} + \operatorname{ch} \varphi''_{k,l})^{-1}$		$\varphi'_{k,l} = \frac{\pi f_{k,l}}{f_{s,p}}$
$D_{k,l}$	$b_{k,l} (a_{k,l}^2 + b_{k,l}^2)^{-1}$		$\operatorname{sh} \varphi''_{k,l} (\cos \varphi'_{k,l} + \operatorname{ch} \varphi''_{k,l})^{-1}$		$\varphi''_{k,l} = \frac{\pi f_{k,l}}{f'_{s,p}}$

$f_{s, p, s, R}$	$f_{sR}^{-2} = (f'_{sR})^{-2} - i(f''_{sR})^{-2}$	$f_{s, p}^{-1} = (f'_{s, p})^{-1} - i(f''_{s, p})^{-1}$
$f'_{s, p, sR}$	$(f'_{sR})^{-2} = \pi^2 R^2 \rho r_{sR} \cos \varphi_{sR}$	$(f'_p)^{-1} = 2l(\rho/r_c)^{1/2} \cos(\varphi_c/2)$
$f''_{s, p, sR}$	$(f''_{sR})^{-2} = \pi^2 R^2 \rho r_{sR} \sin \varphi_{sR}$	$(f''_p)^{-1} = 2l(\rho/r_c)^{1/2} \sin(\varphi_c/2)$
$r_{s, c, sR}$	$r_{sR} = [(s'_R)^2 + (s''_R)^2]^{1/2}$	$r_c = [(c')^2 + (c'')^2]^{1/2}$
$\varphi_{s, c, sR}$	$\varphi_{sR} = \text{arctg}(s''_R/s'_R)$	$\varphi_c = \text{arctg}(c''/c')$
$s, c,$	$s_R = s'_R - js''_R = s_{11}^R (1 - \sigma^2)$	$s = s' - js''$ $c = c' + jc''$
$\sigma$	$\sigma = \sigma' - j\sigma'' = -s_{12}^R/s_{11}^R$	

Примечание.  $k = 1, 2; l = k + 1; \gamma_{kl} = \omega_k/\omega_l; \gamma_{lk} = 1/\gamma_{kl}$ .



Таблица 3.13. Дополнительные параметры для расчета  $F_1$  и  $F_2$  (см. (3.83) радиальной моды диска (ДН<sub>l</sub>))

Параметры	Выражения для расчета
$\sigma; s_R^E; \left  \frac{1}{f_{sR}} \right ^2$	$\sigma = -\frac{s_{12}^E}{s_{11}^E}; \quad \sigma = \sigma' - j\sigma''; \quad s_R^E = s_{11}^E(1 - \sigma^2); \quad \left  \frac{1}{f_{sR}} \right ^2 = \pi^2 R^2 \rho r_{sR}$
$a_{k,l}; b_{k,l}$	$a_{k,l} = 2 \left  \frac{\Phi_{0k,l}}{\Phi_{1k,l}} \right  \cos(\varphi_{0k,l} - \varphi_{1k,l}) - 1 + \sigma'; \quad b_{k,l} = 2 \left  \frac{\Phi_{0k,l}}{\Phi_{1k,l}} \right  \sin(\varphi_{0k,l} - \varphi_{1k,l}) + \sigma''$
$ \Phi_{0,1} ; \varphi_{0,1}$	$ \Phi_{0,1}  = [(\Phi'_{0,1})^2 + (\Phi''_{0,1})^2]^{1/2}; \quad \varphi_{0,1} = \text{arctg}(\Phi''_{0,1}/\Phi'_{0,1})$
$\Phi'_{0k,l}; \Phi''_{0k,l}$	$\Phi'_{0k,l} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v \left[ f_{k,l}^2 \left  \frac{1}{f_{sR}} \right  \right]^{2-v} \cos(v\varphi_{sR})}{(v!)^2}; \quad \Phi''_{0k,l} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v \left[ f_{k,l}^2 \left  \frac{1}{f_{sR}} \right  \right]^{2-v} \sin(v\varphi_{sR})}{(v!)^2}$
$\Phi'_{1k,l}; \Phi''_{1k,l}$	$\Phi'_{1k,l} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v \left[ f_{k,l}^2 \left  \frac{1}{f_{sR}} \right  \right]^{2-v} \cos(v\varphi_{sR})}{(v!)(v+1)}; \quad \Phi''_{1k,l} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v \left[ f_{k,l}^2 \left  \frac{1}{f_{sR}} \right  \right]^{2-v} \sin(v\varphi_{sR})}{(v!)(v+1)}$

мическом материале; все комплексные константы определяются на одной частоте, соответствующей условиям применения; метод использует точное решение без приближений; в предположении частотной независимости комплексной упругой константы или при известных ее дисперсионных характеристиках определяются комплексные диэлектрические и пьезоконстанты в широком частотном диапазоне за пределами резонансной области; определение комплексной упругой константы осуществляется независимо от диэлектрических и пьезоконстант; определение комплексных диэлектрических и пьезоконстант производится независимо друг от друга.

Недостатки метода: высокие требования к точности измерения комплексной проводимости; сложный математический аппарат; точное решение достигнуто только для одномерных задач; применение метода на высокочастотных модах требует тщательного выбора точек измерения.

### § 3.8. Метод минимума дисперсии

Цель метода минимума дисперсии состоит в отыскании констант пьезокерамического материала или параметров пьезокерамического резонатора, для которых достигается наилучшее совпадение экспериментально измеряемых характеристик и их расчетных значений, получаемых на основе применяемой математической модели. Одной из наиболее информативных характеристик является частотная характеристика комплексной проводимости (сопротивления) ПКЭ или ПКР.

Наилучшее совпадение теоретических и экспериментальных характеристик комплексной проводимости (сопротивления) в терминах теории оптимизации означает отыскание минимума целевой функции определенного вида. В [90, 151] в качестве целевой функции используют дисперсию комплексного сопротивления

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n [R_T(f_i) - R_s(f_i)]^2 + \sum_{i=1}^n [X_T(f_i) - X_s(f_i)]^2, \quad (3.88)$$

где  $R_T(f_i)$  и  $R_s(f_i)$  — активные составляющие комплексного сопротивления, соответственно рассчитанные и экспериментально определенные на частоте  $f_i$ ;  $X_T(f_i)$  и  $X_s(f_i)$  — аналогично реактивные составляющие;  $n$  — число экспериментальных точек на частотной характеристике.

Выражение (3.88) является основой одной из модификаций метода. Вариацией определяемых параметров достигается минимум дисперсии, а сами значения параметров, при которых получен минимум дисперсии, берут в качестве истинных. В [90, 151] рассматривается частный случай применения метода к определению параметров на толщинной моде колебаний пластин (мода ПЛВ<sub>p</sub>). Исходной моделью служит точное решение электромеханической задачи об одномерных толщинных колебаниях

нагруженной пластины. Потерями энергии в пьезоматериале пренебрегают [90] или посредством эквивалентного сопротивления учитывают только механические потери [151]. В [151] принимают известными из дополнительных измерений  $C_0$  и частоту механического резонанса, а оптимизацию проводят по пьезоконстанте  $e_{33}$  и эквивалентному сопротивлению потерь  $R$ . В [90] оптимизацию проводят по пяти параметрам:  $C_0, f_p, k_t^2, n = Z_n/Z_n(Z_n, Z_n - \text{волновые сопротивления нагрузки и преобразователя})$ .

В [21] предложено в качестве целевой функции применять нормированную дисперсию

$$S = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{R_r(f_i) - R_s(f_i)}{\Delta R_s(f_i)} \right]^2 + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{X_r(f_i) - X_s(f_i)}{\Delta X_s(f_i)} \right]^2, \quad (3.89)$$

где  $\Delta R_s(f_i), \Delta X_s(f_i)$  — абсолютные погрешности измерения активной и реактивной составляющих комплексного сопротивления на частоте  $f_i$ .

В (3.89) могут использоваться произвольные модели с неограниченным количеством параметров. Целевые функции (3.88) или (3.89) могут быть построены в аналогичном виде для проводимости, что более удобно, например, при определении параметров на пьезомягких модах. Применение функции вида (3.89) позволяет оценить погрешность определения параметров на этапе оптимизационного поиска и принять ее равной той наибольшей вариации, при которой выполняется условие  $S \leq \sqrt{k/n}$ , где  $k$  — число определяемых параметров. Кроме того, при необходимости оценить степень соответствия используемых моделей критерием может служить минимальная нормированная дисперсия. Отметим, что указанный критерий справедлив при условии  $S > 1$ .

**Общая оценка метода.** Основные преимущества метода — возможность использования произвольных моделей с произвольным числом параметров и возможность сравнения различных моделей. Однако с ростом числа параметров и степени сложности модели растут трудности отыскания минимума целевой функции, усложняются методы оптимизационного поиска и увеличивается машинное время. Кроме того, метод требует большого числа экспериментальных точек на частотной характеристике комплексного сопротивления (проводимости). Это обуславливает необходимость использования автоматических измерителей с возможностью сбора и обработки информации на ЭВМ. Одна из возможных программ оптимизации целевой функции вида (3.88) приведена в [151].

### § 3.9. Ультразвуковой динамический метод

Ультразвуковой динамический метод предназначен для определения упругих и пьезоэлектрических констант пьезокерамики.

Математическая модель, используемая в методе, — выражение, определяющее через константы материала фазовые скорости трех ультразвуковых волн, которые могут распространяться в любом заданном направлении анизотропной среды [83]. В случае пьезоэлектрической среды эти скорости определяются не только тензором упругой константы, но через пьезоэффект зависят от диэлектрических и пьезоконстант. Эта зависимость отражается выражением

$$\begin{vmatrix} Q_{11} - \rho v^2 & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{12} & Q_{22} - \rho v^2 & Q_{23} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} - \rho v^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (3.90)$$

где  $Q_{im}$  представляется через константы материала

$$Q_{im} = c_{iklm}^E l_k l_e + \frac{(e_{ijk} l_j l_k)(e_{rsm} l_r l_s)}{e_{pq}^S l_p l_q}, \quad (3.91)$$

где  $c_{iklm}^E$  — тензор упругой жесткости при  $E = \text{const}$  ( $E = 0$ );  $e_{ijk}$  — тензор пьезоконстанты;  $e_{rq}^S$  — тензор диэлектрической проницаемости при  $S = \text{const}$  ( $S = 0$ );  $l_k$  — направляющие косинусы волновой нормали;  $\rho$  — плотность материала.

Основное допущение модели — пренебрежение потерями энергии.

Реализация метода осуществляется с помощью измерения достаточного количества скоростей распространения ультразвуковых колебаний в различных по отношению к оси остаточной поляризации направлениях. Это позволяет построить и решить относительно искомым констант (для пьезокерамики — 5 упругих и 3 пьезоконстанты) систему алгебраических уравнений. Тензоры  $e_{pq}^S$  и  $e_{pq}^T$  предполагаются при этом известными.

Метод разработан в трех модификациях [31, 121, 122], из которых наибольший интерес представляет модификация [122]. Здесь дополнительно к ультразвуковому методу предлагается выполнять определение упругой податливости  $s_{11}^E$ , а также всех пьезоконстант, кроме  $e_{15}$ , с использованием метода Р — А. Это позволяет исключить необходимость измерения скоростей ультразвука в косых направлениях.

Применение комбинации ультразвукового метода и метода Р — А, когда большинство упругих констант определяется по результатам измерения скоростей распространения продольных и поперечных волн в двух взаимно перпендикулярных направлениях на одном образце, а пьезоконстанты — по результатам измерения частот резонанса — антирезонанса на двух модах ПКЭ, изготавливаемых из одного образца, представляется весьма целесообразным.

Для проведения измерений изготавливается ПКЭ в форме стержня с соотношением размеров и расположением электродов,

соответствующим моде  $CH_t$  (см. § 2.1). Соотношение геометрических размеров стержня должно удовлетворять условию  $l \gg t_c$ ,  $\omega$ , однако,  $\omega$  и  $t_c$  должны быть достаточны для измерения скоростей распространения ультразвука в направлениях  $Z$  и  $Y$ . Применение метода Р — А на моде  $CH_t$  (см. табл. 3.4) дает значения  $s_{11}^E$  и  $k_{31}$ . Измерение низкочастотной емкости стержня позволяет из  $k_{31}$  определить  $d_{31}$ . Таким образом, в соответствии с табл. 3.4

$$\left. \begin{aligned} s_{11}^E &= (4\rho f_s^2 t^2)^{-1}; \\ e_{33}^T &= C^T \frac{t}{lw}; \\ d_{31} &= \frac{k_{31}}{2f_s} \frac{t}{l} \sqrt{\frac{C^T}{m}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.92)$$

Измерение скоростей распространения продольных и поперечных волн на стержне в направлениях  $Z$  и  $Y$  позволяет определить

$$c_{33}^D = \rho v_{t(Z)}^2; \quad (3.93)$$

$$c_{44}^E = \rho v_{t(Z)}^2; \quad (3.94)$$

$$c_{11}^E = \rho v_{l(Y)}^2; \quad (3.95)$$

$$c_{44}^D = \rho v_{tZ(Y)}^2; \quad (3.96)$$

$$c_{66}^E = c_{66}^D = \rho v_{tX(Y)}^2; \quad (3.97)$$

где  $v_{l(Z)}$  — скорость распространения продольной волны в направлении  $Z$ ;  $v_{t(Z)}$  — скорость распространения поперечной волны в направлении  $Z$ ;  $v_{l(Y)}$  — скорость распространения продольной волны в направлении  $Y$ ;  $v_{tZ(Y)}$  — скорость распространения поперечной волны со смещением вдоль  $Z$  для направления  $Y$ ;  $v_{tX(Y)}$  — скорость распространения поперечной волны со смещением вдоль  $X$  для направления  $Y$ .

Учитывая соотношения между упругими константами  $c_{ij}^E$  и  $c_{ij}^D$  (см. табл. 1.6), из (3.94) и (3.96) при известной  $e_{11}^S$  определяют

$$e_{15} = \sqrt{e_{11}^S \rho (v_{tZ(Y)}^2 - v_{t(Z)}^2)}. \quad (3.98)$$

Затем из стержня изготавливается пластина с соотношением размеров ( $t_{пл} \ll l_{пл}, \omega$ ), позволяющим реализовать работу на моде ПЛВ<sub>p</sub> (см. § 2.1), т. е. высокочастотную пьезожесткую моду колебаний с резонансным размером  $t_{пл}$ . Применяя метод Р — А, по найденной из высокочастотных диэлектрических измерений  $e_{33}^S$  рассчитывают  $e_{33}$ . Для моды ПЛВ<sub>p</sub> (см. табл. 3.4)

$$e_{33} = h_{33} e_{33}^S = k_t \sqrt{e_{33}^S c_{33}^D}. \quad (3.99)$$

Оставшиеся неизвестными константы определяются далее на основе соотношений между упругими и пьезоконстантами (см. табл. 1.6, 1.8, 1.9) по расчетной схеме, приведенной на рис. 1.5.

Для исключения влияния дисперсии диэлектрической проницаемости предложено [122] определять  $\epsilon_{33}^S$  и  $\epsilon_{11}^S$  на высокой частоте, соответствующей той, на которой измеряются скорости распространения ультразвука. Измерение емкости на этой частоте выполняют методом замещения образца эталонным конденсатором. Например, по [122] эта частота составляет 6 МГц.

Таким образом, по данной модификации метода  $c_{33}^D, c_{44}^E, c_{44}^D, c_{11}^E, c_{66}^E = c_{66}^D, e_{15}e_{33}^S, e_{11}^S$  измеряются на одной частоте (область высоких частот);  $s_{11}^E, d_{31}, e_{33}^T$  — на низких частотах;  $e_{33}$  — на промежуточной частоте, которая, по крайней мере, на порядок ниже частоты измерения  $e_{33}^S$ . При наличии дисперсии констант пьезокерамики указанное может приводить к заметным погрешностям в расчете упругих и пьезоконстант, определяемых на этапах II—IV расчетной схемы, приведенной на рис. 1.5. В особой степени это относится к расчету констант  $c_{13}^E, s_{13}^E, d_{31}, e_{31}$ . Добавим, что расчет этих констант наиболее критичен [122] к вариациям в измеряемых параметрах, которые могут быть обусловлены как точностью их измерений, так и влиянием дисперсии.

**Общая оценка метода.** Основными преимуществами метода являются определение всех составляющих тензоров упругих и пьезоконстант по измерениям на одном образце; отсутствие влияния конечных размеров образца на величину упругих констант, определяемых по измерениям скоростей распространения ультразвука, что позволяет оценить влияние конечных размеров при использовании резонансных методов.

Недостатки метода: низкая точность при работе с «косыми» срезами; влияние допущения о пренебрежении потерями энергии на точность определения констант; невозможность определения констант, характеризующих диссипацию энергии в пьезокерамике; невозможность определения всего комплекса параметров на рабочей частоте; влияние дисперсии констант пьезокерамики на точность расчета; влияние основных недостатков метода Р—А на точность определения пьезоконстант (III модификация метода).

**ПРИБОРЫ И УСТРОЙСТВА ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ  
ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ  
ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ**

**§ 4.1. Основные требования к приборам и устройствам**

В данной главе рассматриваются приборы и устройства, предназначенные для измерения электрофизических параметров пьезокерамических преобразователей (ПКП) с электрической стороны. Предполагается, что механическое нагружение ПКП отсутствует, т. е. преобразователь находится в воздухе и закрепляется в механическом держателе в местах узлов смещений. Невыполнение этого условия приводит к значительным погрешностям при определении диссипативных характеристик ПКП.

К приборам и устройствам для измерения параметров ПКП предъявляют следующие основные требования: 1) обеспечение необходимой точности; 2) обеспечение необходимой полноты измерений; 3) автоматизация процесса измерений.

Два первые требования удается удовлетворить, используя приборы широкого применения, выпускаемые промышленностью. Однако использование этих приборов не всегда обеспечивает возможности автоматизации измерений. В то же время необходимость подобной автоматизации обусловлена большим объемом измерений и расчетов, проводимых при измерениях параметров современных ПКП. Характерной особенностью автоматических устройств является применение в них мини- и микро-ЭВМ. При этом следует отметить два основных направления автоматизации измерения.

1. Разработка специализированных скоростных автоматов, реализующих в основном метод Р—А. Функцию управления измерениями в подобных устройствах выполняет специальный контроллер по жесткой программе, а ЭВМ используется в качестве калькулятора.

2. Разработка универсальных устройств для измерения комплексной проводимости ПКП в широком диапазоне частот. Функцию управления измерениями в данном случае выполняет ЭВМ по программе, определяемой оператором.

В первом случае достигается выигрыш в производительности операции по контролю, во втором — высокая точность, а также универсальность применительно к типам ПКП и используемым методам измерений.

## § 4.2. Автогенераторные измерения

Простейшим устройством для измерения служит автогенератор. ПКП является частью схемы автогенератора и определяет частоту выходного напряжения. Автогенератор может быть использован для определения характеристических частот, однако его погрешности с трудом поддаются учету.

Принцип работы автогенератора основан на включении в цепь положительной обратной связи усилительного элемента четырехполюсника, содержащего ПКП (рис. 4.1, 4.2).

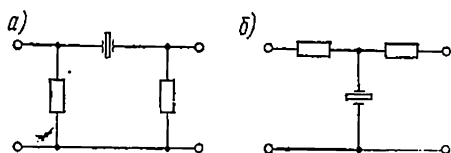
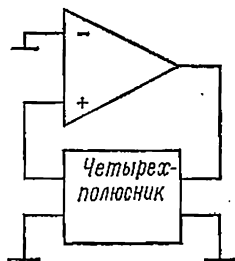


Рис. 4.1. Схемы четырехполюсников, используемых в цепи обратной связи автогенераторов.

Рис. 4.2. Схема автогенератора.



При использовании четырехполюсника по схеме, приведенной на рис. 4.1, а, в автогенераторе возникают колебания, частота которых соответствует резонансной частоте ПКП, что обеспечивает максимальный коэффициент передачи.

При использовании четырехполюсника по схеме, изображенной на рис. 4.1, б, возникают колебания, частота которых соответствует частоте антирезонанса. Подключая к выходу усилителя частотомер, можно определить требуемые частоты.

Необходимым условием возникновения в автогенераторе колебаний служит баланс амплитуд, определяемый выражением

$$k\beta = 1, \quad (4.1)$$

где  $k$  — коэффициент усиления усилителя;  $\beta$  — коэффициент передачи четырехполюсника.

Несоблюдение (4.1) приводит либо к невозбуждению колебаний, либо к возникновению негармонических колебаний, что вызывает погрешности в определении частоты. Поэтому данные устройства дополняют автоматическими регуляторами. Введение авторегулировки позволяет измерять активное сопротивление динамической ветви ПКП, поскольку при соблюдении (4.1), фиксированном  $k$  и известном значении сопротивления резисторов в схеме, приведенной на рис. 4.1, а, существует однозначная зависимость между активным сопротивлением и  $\beta$ . Подобные автогенераторы рассмотрены в [4, 7, 8, 32].

На рис. 4.3 приведена схема автогенератора, представленная в [7]. Вместо четырехполюсника в схеме используется мост из резисторов  $R1$  и  $R2$ , ПКП  $Z$  и регулирующего элемента — полевого транзистора  $VT1$ . Усилитель выполнен на транзисторах  $VT2$



и  $VT3$  и нагружен на трансформатор  $L1$ . На диодах  $VD1$  и  $VD2$  собран детектор с интегрирующим конденсатором  $C5$ . Выход детектора подключен к измерителю  $ПУ$  и затвору транзистора  $VT1$ . При возбуждении усилителя на его выходе возникают гармонические колебания, стационарная амплитуда которых устанавливается автоматически. В зависимости от активного сопротивления динамической ветви ПКП меняется коэффициент передачи моста, а это приводит к изменению напряжения на выходе детектора, которое управляет сопротивлением сток — исток

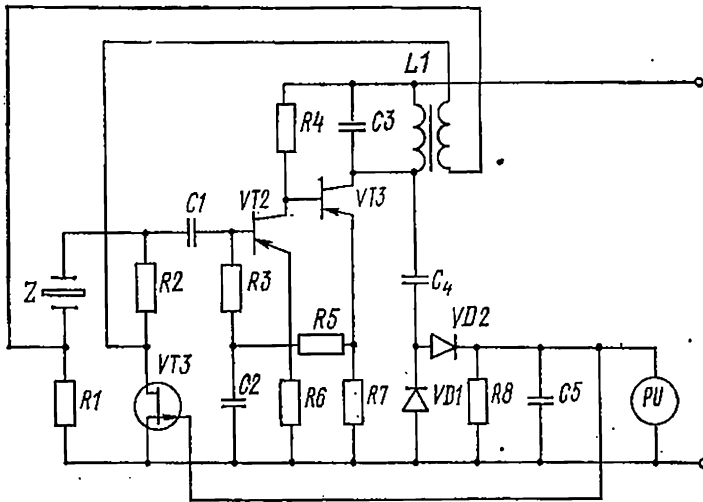


Рис. 4.3. Схема осциллятора с автоматическим регулированием.

транзистора  $VT1$  таким образом, что восстанавливается разбаланс моста. Проведя градуировку зависимости выходного напряжения детектора от измеряемого активного сопротивления ПКП, можно определять сопротивление с точностью 3—6 %.

Для построения схемы, возбуждающейся на частоте антирезонанса, используют четырехполюсник, приведенный на рис. 4.1, б.

Учитывая, что ПКП обычно имеют целый спектр резонансов, усилитель, используемый в автогенераторе, должен быть полосовым. В схеме, показанной на рис. 4.3, функцию полосового фильтра выполняет резонансный контур  $L1C3$ .

Для автоматизации процесса измерения частот резонанса и антирезонанса необходимо произвести подключение ПКП к усилителю соответственно по схемам, приведенным на рис. 4.1. При этом, используя схему, представленную на рис. 4.1, а, одновременно измеряют сопротивление потерь. Величину емкости определяют автоматическим стандартным мостом.

Основным недостатком автогенераторных измерений является низкая точность измерения частоты, обусловленная возбуждением автогенератора не на требуемой частоте из-за наличия паразитных реактивностей на входе и выходе усилителей, а также в соединениях ПКП.

### § 4.3. Амплитудные измерения

Амплитудные измерения широко распространены ввиду удовлетворительной точности и простоты реализации.

Схема для амплитудных измерений (рис. 4.4) содержит генератор гармонического напряжения  $G$ , измерительные резисторы  $R_1, \dots, R_4$ , исследуемый ПКП  $Z$  и индикатор напряжения  $PU$ . Конденсаторы  $C_1$  и  $C_2$  отображают наличие паразитных емкостей монтажа. При измерениях генератор  $G$  настраивается на частоту, при которой достигается максимальное напряжение,

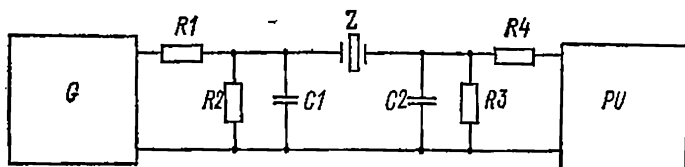


Рис. 4.4. Схема амплитудных измерений.

фиксируемое индикатором  $PU$ , соответствующее частоте резонанса. Заменяя ПКП резистором, обеспечивающим такую же величину напряжения, определяют сопротивление динамических потерь ПКП. Затем устанавливают частоту, при которой напряжение минимально, что соответствует антирезонансу.

Схема амплитудных измерений предъявляет ряд требований к параметрам используемых элементов. Так, генератор  $G$  должен обладать высокой стабильностью частоты (примерно на порядок выше, чем точность измерения частот резонанса и антирезонанса). Кроме того, следует обеспечивать стабильность величины выходного напряжения и малый коэффициент нелинейных искажений. Последнее требование является обязательным при использовании широкополосного индикатора напряжения. В наибольшей степени этим требованиям отвечает генератор ГЗ-110. Возможно применение генератора ГЗ-102, обладающего низким уровнем нелинейных искажений.

Измерительные резисторы выбираются из следующих соображений. Соотношение  $R_2/R_1$  должно быть порядка  $1/10$ , а абсолютное значение  $R_2$  — намного меньше минимального модуля комплексного сопротивления ПКП  $Z$ . Аналогичное требование предъявляется к  $R_3$ , т. е. ток в этом резисторе почти полностью должен определяться сопротивлением ПКП. Необходимо, чтобы сопротивление  $R_4$  было на порядок больше  $R_3$  для исключения влияния входного импеданса индикатора напряжения.

Следует также учитывать влияние емкостей  $C_1$  и  $C_2$ , особенно на высоких частотах. Их импеданс должен быть намного больше, чем величины сопротивлений  $R_2$  и  $R_3$ .

Устройство измерительной ячейки показано на рис. 4.5 [130]. Индикатором напряжения может служить любой милливольтметр переменного тока, но предпочтительно применение селективного вольтметра, что, однако усложняет процесс измерений.

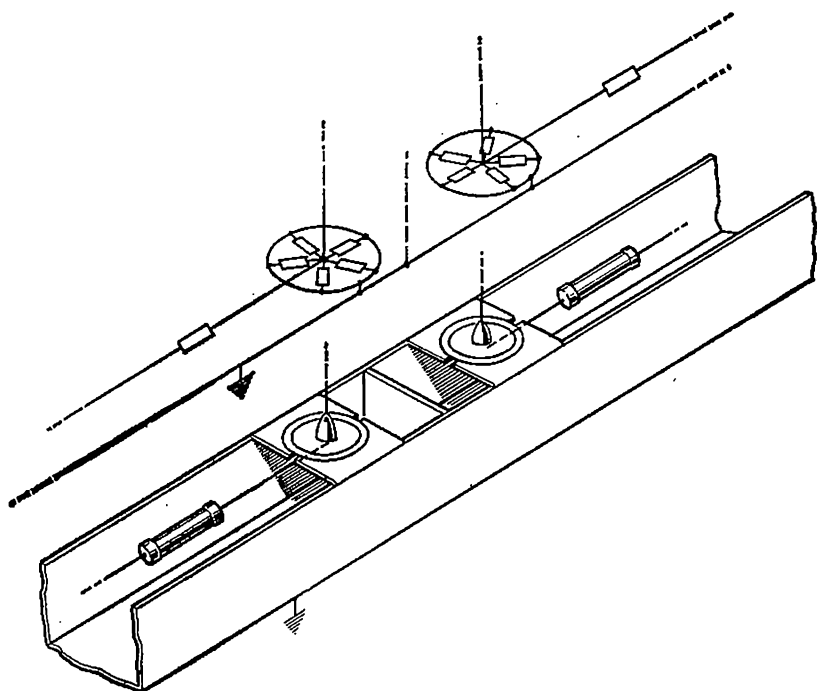


Рис. 4.5. Устройство измерительной ячейки.

Точность измерения параметра  $\Delta f/f_s$  связана с относительной погрешностью  $S$  милливольтметра зависимостью [135]

$$\frac{\Delta f}{f_s} = 0,707 \left( \frac{2R_3}{R} + 1 \right) \frac{\sqrt{S}}{Q}, \quad (4.2)$$

где  $R$  — сопротивление потерь ПКП;  $Q$  — добротность.

Точность определения частоты антирезонанса сложным образом зависит от спектральной чистоты сигнала генератора. Это обусловлено тем, что в отсутствие механической нагрузки ПКП является узкополосным режекторным фильтром в районе антирезонансной частоты. Поэтому составляющая напряжения на  $R_3$  от прохождения высших гармоник соизмерима с составляющей напряжения на основной гармонике. Это не позволяет про-

известить точную настройку на антирезонанс в случае широкополосного индикатора напряжения.

Для определения диссипативных характеристик ПКП можно использовать отношение напряжений на выходе измерительной схемы, найденные на резонансе и антирезонансе. Возникающие при этом погрешности могут достигать значений от десятков до сотен процентов, что обусловлено: наличием гармонических составляющих в спектре испытательного сигнала; зависимостью напряжения на входе схемы от величины импеданса ПКП; конечностью величины сопротивления нагрузочного резистора.

Автоматизация амплитудных измерений достигается различными способами [5, 10, 12, 58]. Так, в [58] рассматривается

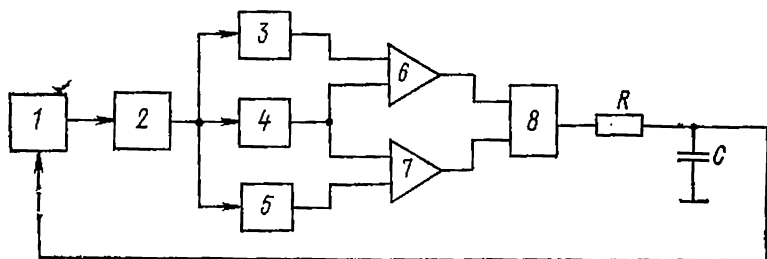


Рис. 4.6. Структурная схема устройства для автоматических измерений.

устройство (рис. 4.6), содержащее управляемый генератор гармонических колебаний 1, четырехполосник 2 с исследуемым ПКП, амплитудные детекторы 3 и 5, пиковый детектор 4, компараторы 6 и 7, триггер 8. В исходном состоянии на выходе триггера устанавливается низкий потенциал, определяющий минимальную частоту генератора. После запуска устройства на триггере наблюдается высокий потенциал и происходит заряд конденсатора  $C$ . С ростом напряжения на конденсаторе растет частота генератора до тех пор, пока напряжение на выходе детектора 3 не сравняется с напряжением на выходе детектора 4, что произойдет при переходе частоты генератора через резонанс. В этот момент сработает компаратор 6 и установит триггер в нулевое состояние. Затем начнется разряд конденсатора и снижение частоты. При достижении равенства напряжений амплитудного и пикового детекторов сработает компаратор 5 и триггер перейдет в единичное состояние. Напряжение на конденсаторе начнет увеличиваться и т. д. Процесс будет циклически повторяться, сопровождаясь «захватом» резонансной частоты. Аналогично определяется частота антирезонанса. По данным [58] ошибка в определении частоты составляет

$$\Delta f = S_p \frac{\Delta U}{2}, \quad (4.3)$$

где  $\Delta U$  — разность порогов срабатывания компараторов, В,  $S_p$  — крутизна регулировочной характеристики генератора, Гц/В.

## § 4.4. Амплитудно-фазовые измерения

Амплитудно-фазовые измерения используют основную особенность фазочастотной характеристики адмитанса ПКЭ и ПКП, которая заключается в том, что в районе резонанса фаза комплексной проводимости резко уменьшается, в то время как вдали от резонанса она практически постоянна и близка к  $\pi/2$ .

Устройство для амплитудно-фазовых измерений (рис. 4.7) содержит генератор гармонических колебаний 1, измерительный четырехполюсник 2, измеритель напряжения 3 и фазометр 4. Если модуль полного сопротивления ПКП намного больше  $R$ , а

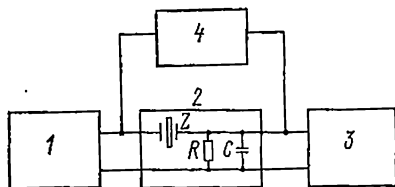


Рис. 4.7. Схема амплитудно-фазовых измерений.

шунтирующая емкость монтажа  $C$  не оказывает заметного влияния, то при стабильном выходном сигнале генератора напряжение, измеренное вольтметром 3, пропорционально модулю комплексной проводимости ПКП, а разность фаз, измеренная фазометром, определяет фазу проводимости. Данный принцип измерения положен в основу работы ряда устройств [9, 11, 97, 110].

В автоматической установке [97] поиск резонанса основан на анализе фазочастотной характеристики проводимости, а для определения параметров ПКП используются значения составляющих полной проводимости

$$G = \frac{\alpha (\cos \varphi - \alpha)}{R (1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \varphi)}; \quad (4.4)$$

$$B = \frac{\alpha \sin \varphi}{R (1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \varphi)}, \quad (4.5)$$

где  $\alpha$  — отношение напряжения на выходе четырехполюсника ко входному напряжению;  $\varphi$  — измеренный угол сдвига фаз;  $G$ ,  $B$  — активная и реактивная составляющие адмитанса соответственно.

Расчет параметров ПКП производится посредством мини-ЭВМ с выводом результатов на алфавитно-цифropечатающее устройство. Общий вид установки, модифицированной по сравнению с описанной в [97] для работы с мини-ЭВМ «Электроника ДЗ-28», приведен на рис. 4.8.

На рис. 4.9 представлена структурная схема устройства, основанного на принципах автоподстройки частоты, отличающегося повышенным быстродействием [110]. Генератор, управляемый напряжением, ГУН вырабатывает гармонические коле-

бания, частота которых пропорциональна управляющему напряжению. Этот сигнал поступает на вход четырехполюсника и на один из каналов фазового детектора  $\Phi Д$ . На второй канал  $\Phi Д$  подается сигнал с выхода четырехполюсника. С выхода  $\Phi Д$  напряжение, пропорциональное углу сдвига фаз между входными

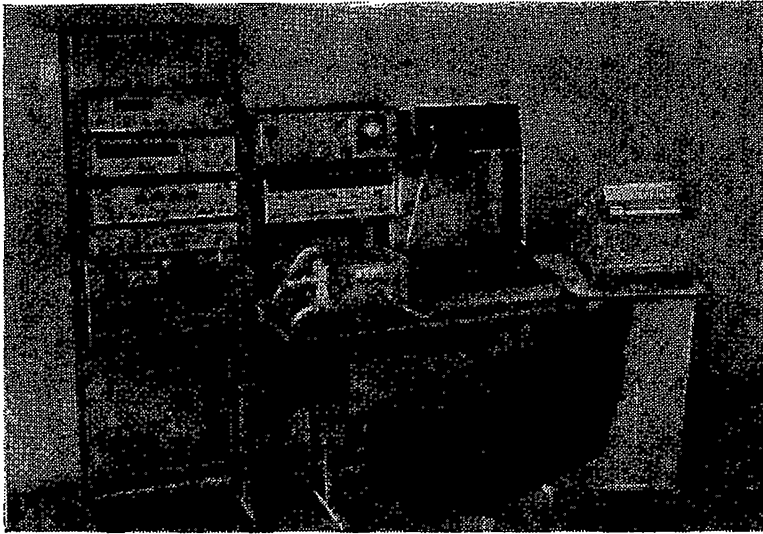
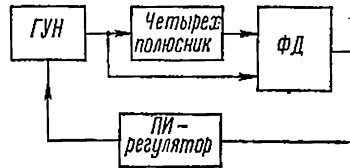


Рис. 4.8. Общий вид установки для автоматических амплитудно-фазовых измерений.

сигналами, поступает на вход пропорционально-интегрального (ПИ) регулятора, который обеспечивает движение частоты генератора к резонансному или антирезонансному значениям в за-

Рис. 4.9. Структурная схема устройства поиска резонансной частоты с использованием фазовой автоподстройки частоты.



висимости от схемы подключения четырехполюсника. Таким образом, система автоматически устанавливает одну из частот нулевого реактанса ПКП.

По рассмотренному принципу работают приборы типа ИПКР-2, АСР-1М, АИРА-1, «Параметр». Некоторые из этих приборов используются в комплекте с ЭВМ и позволяют полностью автоматизировать измерение и расчет параметров ПКП. Точность измерения частот резонанса и антирезонанса порядка  $10^{-3}$  —  $10^{-4}$ .

#### § 4.5. Измерение частотных характеристик комплексного сопротивления

Наиболее универсальным и перспективным средством определения параметров ПКП являются измерители частотных ха-



Рис. 4.10. Общий вид установки для автоматического измерения параметров пьезокерамических преобразователей.

рактеристик комплексного сопротивления, обеспечивающие взаимодействие с управляющими вычислительными системами.

Измерения частотных характеристик при помощи ручных мостов полной проводимости малопроизводительны. Измерители

импеданса с непосредственным отсчетом могут прямо использоваться для снятия характеристик ПКП. Это измерители ВМ-507 предприятия ЧССР «Tesla», 4800А фирмы «Hewlett Packard». Однако последние обладают низкой точностью ( $\pm 5\%$  — модуль сопротивления,  $\pm 6^\circ$  — фаза).

В [89] рассмотрена установка, позволяющая визуализировать на экране электронного индикатора частотную характеристику комплексной проводимости ПКП и одновременно измерять модуль и составляющие проводимости. Используется принцип синхронного детектирования, позволяющий выделить составляющие комплексной проводимости из напряжения, пропорционального модулю проводимости ПКП, и двух ортогональных опорных напряжений. Установка содержит анализатор частотных характеристик типа Х1-36 и специально разработанный измеритель полной проводимости. Диапазоны рабочих частот 20—200 кГц, проводимостей —  $10^{-1}$  —  $10^{-4}$  См. Точность измерения  $\pm 5\%$ .

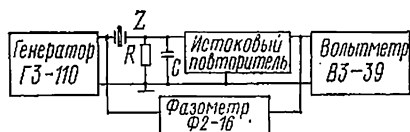


Рис. 4.11. Схема измерительной цепи при измерении малых по модулю импедансов.



Рис. 4.12. Схема измерительной цепи для измерения больших по модулю импедансов.

В установку входят: генератор ГЗ-110, фазометр Ф2-16, вольтметр В3-39, вольтметр В7-23, информационная панель ПИУ-2, мини-ЭВМ «Электроника ДЗ-28», алфавитно-цифropечатающее устройство «Консул», измерительная ячейка и блок контроллеров интерфейса связи приборов с мини-ЭВМ. Установка выполнена в виде приборной стойки (рис. 4.10) [20].

Процесс измерений в установке, представляющей собой программно-управляемый комплекс, осуществляется следующим образом. Со стороны ЭВМ на генераторе устанавливается выходное напряжение заданной частоты. После этого контроллер измерительной ячейки выбирает схему измерительной цепи (рис. 4.11 или 4.12) и величину сопротивления резистора  $R$ . Вольтметром В3-39 измеряется выходное напряжение измерительной цепи, а фазометром Ф2-16 — угол сдвига фаз между этим напряжением и напряжением на входе измерительной цепи. Для уменьшения влияния соединительных кабелей и входного сопротивления приборов измерительная ячейка снабжена истоковым повторителем. Результаты измерений в виде аналоговых величин преобразуются в цифровой код вольтметром В7-23 и вводятся в мини-ЭВМ, которая рассчитывает комплексную проводимость ПКП по фор-



мулам

$$G = \sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2} \frac{\beta \cos(\varphi - \varphi_1) - \cos \varphi_1}{\beta^2 - 2\beta \cos \varphi + 1}; \quad (4.6)$$

$$B = \sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2} \frac{\beta \sin(\varphi - \varphi_1) - \sin \varphi_1}{\beta^2 - 2\beta \cos \varphi + 1}. \quad (4.7)$$

где  $\varphi_1 = \arctg \omega RC$ , и

$$G = \frac{1}{R} (\beta \cos \varphi - 1); \quad (4.8)$$

$$B = -\frac{\beta}{R} \sin \varphi - \omega C, \quad (4.9)$$

Здесь  $\beta$  — отношение входного напряжения к выходному;  $\varphi$  — измеренное значение угла сдвига фаз;  $C$  — шунтирующая емкость монтажа.

Формулы (4.6)—(4.7) относятся к схеме, приведенной на рис. 4.11, а формулы (4.8)—(4.9)—к схеме показанной на рис. 4.12.

По измеренным значениям полной проводимости вычисляются электрофизические параметры. Информационная панель ПИУ-2 и устройство «Консул» обеспечивают диалоговый режим работы установки.

Рядом зарубежных фирм выпускаются автоматические измерители комплексного сопротивления, которые могут быть применены для анализа ПКП. Отличительными особенностями этих приборов являются использование новейшей элементной базы, в частности микропроцессоров, а также наличие стандартного интерфейса, позволяющего сравнительно просто сочленять при-

Т а б л и ц а 4.1 Основные характеристики зарубежных автоматических измерителей комплексного сопротивления

Наименование характеристики	Тип прибора		
	1174	ZPV-EI	4192A
Частотный диапазон	$10^{-4}$ —1 МГц	10 Гц—50 МГц	5 Гц—13 МГц
Измеряемое сопротивление (проводимость)	—	$10^{-7}$ —10 См	$10^{-4}$ Ом—1,3 МОм
Погрешность измерения модуля сопротивления (проводимость), %	$\pm 0,3$	$\pm 1,5$	$\pm 0,5$
Погрешность измерения фазы, °	$\pm 0,5$	$\pm 0,5$	$\pm 0,1$
Время измерения, мс	100	95 (1 кГц)	90—170 (1 кГц)

боры с управляющими информационно-вычислительными системами. Указанные особенности дают возможность значительно повысить точность измерений и обеспечить их автоматизацию.

В табл. 4.1 приведены основные технические характеристики анализатора частотных характеристик 1174 [128], векторного анализатора ZPV — E1 [153], низкочастотного анализатора импеданса 4192A [126].

Перечисленные приборы имеют встроенные генераторы синтезаторного типа, имеющие большую точность установки частоты и высокую стабильность характеристик. Можно ожидать, что подобные приборы найдут широкое применение в установках для исследования ПКП и контроля их параметров в производственных условиях.

**ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ И ХАРАКТЕРИСТИКИ  
ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ТИПА  
СТЕРЖНЕЙ, ПЛАСТИН, ЦИЛИНДРОВ ПРОИЗВОЛЬНОЙ  
СТРУКТУРЫ**

**§ 5.1. Типы преобразователей**

Применение пьезопреобразователя для излучения (приема) акустических сигналов предполагает совместное использование пьезоактивного элемента, включенного в цепь генератора (приемника), и набора пассивных либо пьезоактивных элементов, целевое назначение которых определяется конструктивно-технологическими соображениями или специальными требованиями акустической коррекции основных характеристик преобразователя.

Большому количеству преобразователей различного назначения можно сопоставить ограниченный набор физических моделей, в рамках которых возможен расчет значительного количества характеристик преобразователя и параметров, определенных на этих характеристиках. К таким моделям относятся следующие:

- тонкий стержень, совершающий продольные колебания (длина стержня — резонансный размер, радиус стержня мал по сравнению с длиной волны);
- тонкий диск, совершающий радиальные колебания (радиус диска — резонансный размер, толщина диска мала по сравнению с длиной волны);
- протяженный цилиндр, совершающий радиальные колебания осесимметричного типа (радиус цилиндра — резонансный размер, длина цилиндра велика по сравнению с длиной волны);
- широкая пластина, совершающая толщинные колебания (толщина пластины — резонансный размер, поперечный размер пластины велик по сравнению с длиной волны);
- тонкая шайба (короткий цилиндр), совершающая радиальные колебания осесимметричного типа (средний радиус шайбы — резонансный размер, толщина шайбы мала по сравнению с длиной волны);
- сферическая оболочка, совершающая радиальные колебания;
- тонкая пластина, совершающая изгибные колебания (поперечный размер пластины — резонансный размер, толщина пластины мала по сравнению с длиной волны);

— протяженный цилиндр, совершающий изгибные колебания (радиус цилиндра — резонансный размер, длина цилиндра велика по сравнению с длиной волны);

— тонкая шайба (короткий цилиндр), совершающая изгибные колебания (средний размер шайбы — резонансный размер, толщина шайбы мала по сравнению с длиной волны).

Простейшим физическим моделям соответствуют *одномерные* математические модели, описывающие какую-либо одну моду колебаний преобразователя (см. гл. 1).

## § 5.2. Режимы работы

По характеру применения преобразователя выделяются различные режимы его работы, каждый из которых имеет собственный набор характеристик и параметров. Наиболее эффективны специализированные преобразователи, работающие в определенном режиме.

Для излучения (приема) тонального (узкополосного) сигнала наиболее эффективен резонансный преобразователь (излучатель или приемник). Амплитудно-частотная (АЧХ) или фазо-частотная (ФЧХ) характеристики стандартные, задавать их не обязательно. Работа преобразователя характеризуется такими параметрами, как рабочая частота и полоса пропускания, чувствительность в режиме излучения, коэффициент передачи по мощности и КПД для излучателя, чувствительность и коэффициент передачи по мощности в режиме приема, активная и реактивная составляющие полной проводимости (сопротивления), определяемые на рабочей частоте. Выбор рабочей частоты — самостоятельная задача, при решении которой учитывается следующее: 1) чувствительность в режиме излучения максимальна на частоте максимума активной составляющей полной проводимости преобразователя, которая достаточно точно соответствует частоте резонанса; 2) чувствительность в режиме приема, определенная для разомкнутого преобразователя, максимальна на частоте антирезонанса.

Для излучения (приема) тонального (узкополосного) сигнала в диапазоне изменения рабочей частоты наиболее целесообразен резонансный преобразователь с перестраиваемой рабочей частотой [6, 50]. Работа преобразователя характеризуется указанным выше набором параметров и зависимостью этих параметров, включая рабочую частоту, от параметра, управляющего рабочей частотой. Перестройка рабочей частоты эффективна, если основные параметры преобразователя, например его чувствительность, изменяются в диапазоне перестройки не более чем на 3 дБ.

Для излучения широкополосного сигнала преобразователь должен быть широкополосным в рабочем диапазоне частот. Работа преобразователя характеризуется полным набором характеристик, включая частотные характеристики активной и реак-

тивной составляющих полной проводимости (сопротивления), коэффициентов передачи по мощности, чувствительности в режимах излучения и приема, включая АЧХ и ФЧХ.

Энергетическая эффективность работы широкополосного преобразователя оценивается коэффициентом передачи по энергии, который корректно определяется для любого сигнала, заданного своим спектром, и любого преобразователя, заданного частотной зависимостью коэффициента передачи по мощности [53, 54].

Важными в практическом отношении являются преобразователи для излучения (приема) коротких импульсных сигналов, относящихся к категории простых сигналов широкополосного типа, эффективная длительность которых обратно пропорциональна эффективной ширине спектра. Для излучения (приема) коротких импульсных сигналов следует использовать импульсные преобразователи, параметры которых определяются из условия минимума длительности переходного процесса.

При таком определении импульсного преобразователя его работу следует анализировать во временной области с использованием аппарата импульсных и переходных характеристик, не прибегая к спектральным представлениям. Этот метод анализа не является традиционным и предполагает алгоритмизацию следующего набора последовательно решаемых задач: 1) расчет спектра собственных частот преобразователя и нахождение собственных функций; 2) разложение импульсной характеристики преобразователя в ряд по собственным функциям; 3) представление рабочего сигнала, сформированного преобразователем при заданном способе возбуждения, разложением в обобщенный ряд по собственным функциям; 4) определение основных параметров импульсного преобразователя, характеризующих энергетическую эффективность его работы и искажение (уширение) импульса возбуждения переходным процессом.

Характерные задачи анализа работы импульсных пьезопреобразователей рассмотрены в [40, 43, 45, 46].

### **§ 5.3. Особенности практической реализации преобразователей различного назначения и построение соответствующей физической модели**

Целевое назначение преобразователя в большинстве случаев однозначно определяет режим его работы, характеристику направленности, геометрию активного элемента, размеры и геометрию пьезопреобразователя, вариант конструктивно-технологического исполнения. Эти факторы в совокупности определяют степень сложности преобразователя и соответствующей ему физической модели.

Преобразователи резонансного типа имеют наиболее простую конструкцию, содержащую минимальное число элементов,

включая активный элемент, элементы армирования, герметизации или элементы соединения с герметизирующим корпусом. Физическая модель такого преобразователя включает активный элемент и минимально необходимый набор слоев (накладок), параметры которых определяются конструктивными соображениями, т. е. фиксированы в расчетной схеме.

Преобразователи с более сложными функциональными обязанностями имеют более сложную структуру, состоящую в общем случае из набора активных пьезоэлементов с независимым входом (выходом) и набора пассивных или пьезоактивных слоев с пассивными электрическими цепями, выполняющих в целом коррекцию основных частотных характеристик преобразователя в соответствии с заданными критериями и функциональными обязанностями. Математическая модель такого преобразователя может быть достаточно произвольной даже в рамках одномерных теорий. Задача анализа преобразователя произвольной структуры сводится к определению минимального набора согласующих (корректирующих) слоев, их акустических и геометрических параметров.

После определения структуры преобразователя необходимо достаточно точно описать характер акустической нагруженности его рабочей поверхности.

Наиболее просто определяется акустическая нагруженность преобразователя, у которого резонансным размером служит минимальный размер, а поперечный (нерезонансный) размер велик по сравнению с длиной волны (преобразователь типа пластины, совершающей толщинные колебания; преобразователь типа протяженного цилиндра, совершающего радиальные колебания). В этом случае удельная акустическая нагруженность преобразователя определяется только волновым сопротивлением рабочей среды, если она является неограниченной и однородной, или входным сопротивлением среды, если она слоисто-неоднородная или ограниченная в направлении излучения на расстояниях меньших, чем геометрическая протяженность акустического импульса.

Сложнее определить акустическую нагруженность одиночного преобразователя, резонансным размером которого служит максимальный размер, а поперечный мал по сравнению с длиной волны (преобразователь типа стержня, совершающего продольные колебания; преобразователь типа короткого цилиндра, тонкой шайбы или круглого диска, совершающий радиальные колебания). Здесь акустическая нагруженность преобразователя в сильной степени зависит от дифракционных эффектов, а при отсутствии акустических экранов — и от эффектов акустического короткого замыкания, определяющих в совокупности сопротивление излучения рабочей поверхности преобразователя (излучателя или приемника). Сопротивление излучения, найденное из решения соответствующей полевой задачи на излучение, играет роль сопротивления акустической нагрузки при решении

соответствующей граничной задачи для преобразователя, совершающего колебания при граничных условиях импедансного типа.

В общем случае эффекты дифракции и акустического короткого замыкания уменьшают акустическую нагруженность преобразователя, рабочую полосу частот и КПД; их влияние тем существеннее, чем ниже рабочая частота.

Промежуточным по сложности будет случай, когда преобразователь с малыми поперечными размерами используется в составе многоэлементной антенны, поперечные размеры которой могут быть соизмеримыми или достаточно большими по сравнению с длиной волны. В этом случае сопротивление излучения и соответственно акустическая нагруженность отдельного преобразователя определяются геометрией всей антенной системы, относительным расположением конкретного преобразователя и, в конечном счете, эффектами интерференции в ближнем поле антенны.

#### § 5.4. Преобразователь типа тонкого стержня (пластины) с продольной поляризацией

**Модель преобразователя.** Продольные колебания в тонком стержне могут возбуждаться продольным или поперечным электрическим полем (пьезоэффектом), при этом больший коэффициент электромеханического преобразования соответствует продольному пьезоэффекту. Продольные колебания тонкого стержня в продольном электрическом поле и толщинные колебания пластины, поляризованной по толщине, описываются в рамках одной математической модели, но при различных значениях физических параметров, описывающих модель. Ниже приводятся физические величины — аналоги, причем первая величина относится к пластине, а величина, стоящая в скобках, — к тонкому стержню;  $C_{33}^D (E^D)$  — действующий модуль упругости;  $e_{33} (d_{33}/S_{33}^E)$  — действующая пьезопостоянная;  $e_{33}^2/\epsilon_{33}^S C_{33}^D (d_{33}^2/\epsilon_{33}^\sigma S_{33}^E)$  — действующее значение квадрата коэффициента электромеханической связи;  $\sqrt{C_{33}^D/\rho} (\sqrt{E^D}/\rho)$  — действующее значение скорости звука. Приведем также соотношения — аналоги;  $C_{33}^E = C_{33}^D (1 - \beta)$ ;  $E^E = E^D (1 - \beta)$ ;  $(E^E = 1/S_{33}^E, E^D = 1/S_{33}^D)$ ;  $\epsilon^S = \epsilon^\sigma (1 - \beta)^*$ .

Характеристику работы преобразователя с произвольными акустической и электрической нагрузками покажем на примере колебательной системы типа пластины.

**Режим излучения.** Основная система уравнений, включающая уравнение движения, уравнения прямого и обратного пьезоэф-

---

\*  $\beta$  — соответствующее значение квадрата коэффициента электромеханической связи.

факта и уравнение электростатики, имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma}{\partial z}; \\ \sigma &= C_{33}^E \frac{\partial u}{\partial z} - e_{33} E; \\ D &= e_{33}^s E + e_{33} \frac{\partial u}{\partial z}; \\ \frac{\partial D}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

где  $u$ ,  $\sigma$  — смещение и напряжение, описывающие поле упругих деформаций;  $D$ ,  $E$  — индукция и напряженность электрического поля.

Система (5.1) решается при граничных условиях импедансного вида

$$\begin{aligned} z &= \pm l; \\ \sigma \pm z_a^\pm \frac{\partial u}{\partial t} &= 0; \quad U_n Y_n + S \frac{\partial D}{\partial t} = 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где  $z_a^\pm$  — сопротивления акустических нагрузок, приложенных к торцам  $z = \pm l$  активного элемента;  $Y_n$  — проводимость электрической нагрузки на активный элемент;  $S$  — площадь поверхности пьезоэлемента;  $U_n$  — напряжение, приложенное к пьезоэлементу.

При гармонической зависимости искомых величин от времени типа  $\exp(i\omega t)$  решение граничной задачи (5.1), (5.2) имеет вид

$$\begin{aligned} -\sigma(l) &= U_n \frac{e_{33}}{2l} \frac{\alpha_a^+}{1 + \alpha_a^+} \frac{(1-a)(1-av^-)}{\Delta_0 - \Delta_1}; \quad (5.3) \\ \alpha_a^\pm &= z_a^\pm / z_n; \quad z_n = \sqrt{\rho C_{33}^D}; \quad v^\pm = \frac{1 - \alpha_a^\pm}{1 + \alpha_a^\pm}; \quad a = e^{-2ikl}; \\ k &= \omega / c_n; \quad c_n = \sqrt{C_{33}^D / \rho}; \quad \Delta_0 = 1 - a^2 v^+ v^-; \\ \Delta_1 &= \frac{\beta}{4ikl} (1-a) [2 + v^+ + v^- - a(v^+ + v^- + 2v^+ v^-)]. \end{aligned}$$

Решение (5.3), записанное в виде

$$-\frac{\sigma(l)}{U_n} = \frac{e_{33}}{2l} \frac{\alpha_a^+}{1 + \alpha_a^+} \frac{(1-a)(1-av^-)}{\Delta_0 - \Delta_1} = v_n e^{i\Phi_n}, \quad (5.4)$$

определяет следующий набор основных характеристик пьезопреобразователя в режиме излучения:  $v_n = |[\sigma(l)]/U_n|$  — АЧХ чувствительности преобразователя в режиме излучения;  $\Phi_n$  — ФЧХ чувствительности преобразователя в режиме излучения;  $Y_n = i\omega C_n [\Delta_0 / (\Delta_0 - \Delta_1)]$  — полная проводимость преобразо-



вателя;  $C_n$  — емкость заторможенного преобразователя площадью  $S_n$ .

Если преобразователь включен в цепь генератора с ЭДС  $U_r$  и внутренним сопротивлением  $R_r$ , то можно определить коэффициенты передачи по напряжению  $k_n$  и мощности  $\Pi_n$  в режиме излучения:

$$k_n = U_n / U_r = [1 + R_r (Y_s + Y_n)]^{-1}; \quad (5.5)$$

$$\Pi_n = \frac{P_{ак}}{P_s} = \frac{\beta}{\pi} (1 - |v^T|^2) R_r \omega_n C_n \cdot \left| \frac{(1-a)(1-av^-)}{\Delta_0 - \Delta_1} k_n \right|^2; \quad (5.6)$$

где  $P_{ак} = (1/2) S_n |\sigma(l)/z_a^+|^2 R_e z_a^+$  — мощность, излученная в акустическую нагрузку  $z_a^+$ ;  $\omega_n = \pi c_n / 2l$  — основная антирезонансная частота ненагруженного пьезопреобразователя  $P_s = U_r^2 / 8R_r$  — номинальная мощность генератора.

Очевидно, что  $\Pi_n \leq 1$ , причем равенство имеет место для преобразователя без потерь, односторонне нагруженного на рабочую среду с акустическим сопротивлением  $z_a^+$  при выполнении условий согласования

$$1/R_r = \text{Re } Y_n; \quad \text{Im } (Y_s + Y_n) = 0; \quad k_n = 0,5. \quad (5.7)$$

При широкополосном возбуждении преобразователя генератором с ЭДС  $U_r(t)$ , заданной своим спектром  $U_r(\omega)$ , следует ввести коэффициент передачи по энергии  $w_n$  в акустическую нагрузку  $z_a^+$ :

$$w_n = \frac{W_{ак}}{W_s} = \int_0^{\infty} |U_r(\omega)|^2 \Pi_n(\omega) d\omega \left/ \int_0^{\infty} |U_r(\bar{\omega})|^2 d\bar{\omega} \right., \quad (5.8)$$

где  $W_{ак} = S_n \text{Re } Z_a^+ \int_0^{\infty} \left| \frac{\sigma(l, t)}{z_a^+} \right|^2 dt = S_n \text{Re } z_a^+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left| \frac{\sigma(l, \omega)}{z_a^+} \right|^2 d\omega$  — полная энергия, излученная в акустическую нагрузку;  $W_s = \frac{1}{4\pi R_r} \int_0^{\infty} |U_r(\omega)|^2 d\omega$  — энергия, которую может отдать генератор в согласованную с ним нагрузку.

В дополнение к указанным характеристикам приведем различные формы уравнений собственных частот пьезопреобразователя:

уравнение собственных частот преобразователя в режиме холостого хода с электрической стороны (акустические нагрузки  $z_a^\mp$  произвольны)

$$\Delta_0 = 0; \quad (5.9)$$

уравнение собственных частот преобразователя в режиме короткого замыкания с электрической стороны (акустические на-

грузки  $z_a^\mp$  произвольны)

$$\Delta_0 - \Delta_1 = 0; \quad (5.10)$$

уравнение собственных частот преобразователя, нагруженного с электрической стороны на проводимость  $Y_s$  (акустические нагрузки  $Z_a^+$  произвольны)

$$Y_s + Y_n = 0. \quad (5.11)$$

Для ненагруженного преобразователя без потерь собственные частоты в режимах холостого хода и короткого замыкания совпадают соответственно с частотами антирезонанса и резонанса.

Для нагруженного преобразователя собственные частоты становятся комплексными с положительной мнимой частью, характеризующей затухание собственных колебаний во времени.

Характеристики (5.4) — (5.8) совместно с уравнениями (5.9) — (5.11) полностью описывают работу пьезопреобразователя в режиме излучения. Для односторонне нагруженного преобразователя формулы упрощаются:

$$v_n = \sqrt{\frac{|z_a^+|^2}{S_n} \frac{\operatorname{Re} Y_n}{\operatorname{Re} z_a^+}} \quad (5.12)$$

и для вычисления АЧХ чувствительности излучателя по выражению (5.12) достаточно вычислить его активную проводимость.

При нагружении преобразователя на полупространство ( $|z_a^+| = \operatorname{Re} z_a^+$ ) справедлива оценка

$$(\operatorname{Re} Y_n)_{\max} = \frac{4\beta}{\pi\alpha_a^+} \omega_n C_n, \quad (5.13)$$

т. е. активная составляющая проводимости максимальна на частотах, соответствующих его собственным частотам в режиме короткого замыкания (нечетным гармоникам), а величина максимума не зависит от номера гармоники. С учетом (5.12) и (5.13) максимальная чувствительность [29]

$$(v_n)_{\max} = \frac{e_{33}}{l} = \frac{4e_{33}}{c_n} f_n; \quad f_n = \omega_n / 2\pi.$$

**Режим приема.** В этом случае наряду с основными уравнениями используются граничные условия вида

$$z = \pm l; \\ \sigma \pm z_a^\pm \frac{\partial u}{\partial t} = 2\sigma_{\text{пад}}^\pm; \quad U_n' Y_s + S \frac{\partial D}{\partial t} = 0, \quad (5.14)$$

где  $\sigma_{\text{пад}}^\pm$  — напряжение в волне, падающей на торцы  $z = \pm l$  преобразователя соответственно;  $U_n'$  — напряжение на пьезоприемнике.

Будем рассматривать только односторонний прием ( $\sigma_{\text{пад}}^- = 0$ ,  $\sigma_{\text{пад}}^+ = \sigma_0$ ).

Решение в режиме приема имеет вид

$$U_{\text{п}}' = -\sigma_0 \frac{e_{33} S_{\text{п}}}{2l} \frac{1+v^+}{z_{\text{п}}} \frac{(1-a)(1-av^-)}{(\Delta_0 - \Delta_1)(Y_{\text{з}} + Y_{\text{п}})}. \quad (5.15)$$

Чувствительность преобразователя в режиме приема на холостом ходу

$$\left( \frac{U_{\text{п}}'}{-\sigma_0} \right)_{\text{х. х}} = \frac{e_{33} S_{\text{п}}}{2l} \frac{1+v^+}{z_{\text{п}}} \frac{(1-a)(1-av^-)}{-i\omega C_{\text{п}} \Delta_0} = \nu_{\text{пр}} e^{i\Phi_{\text{пр}}}, \quad (5.16)$$

где  $\nu_{\text{пр}} = |U_{\text{пр}}'/\sigma_0|_{\text{х. х}}$  — АЧХ чувствительности пьезоприемника;  $\Phi_{\text{пр}}$  — ФЧХ чувствительности пьезоприемника.

Преобразователь в режиме приема можно рассматривать как генератор тока с проводимостью  $Y_{\text{г}} = Y_{\text{п}}$  и амплитудой тока

$$i_{\text{г}} = -\sigma_0 \frac{e_{33} S_{\text{п}}}{2l} \frac{1+v^+}{z_{\text{п}}} \frac{(1-a)(1-av^-)}{\Delta_0 - \Delta_1}.$$

Коэффициенты передачи по напряжению  $k_{\text{пр}}$  и мощности  $\Pi_{\text{пр}}$  определяются формулами

$$k_{\text{пр}} = \frac{Y_{\text{п}}}{Y_{\text{з}} + Y_{\text{п}}}; \quad (5.17)$$

$$\Pi_{\text{пр}} = \frac{\beta}{\pi} (1 - |v^+|^2) \omega_{\text{п}} C_{\text{п}} \operatorname{Re} Y_{\text{з}} \left| \frac{(1-a)(1-av^-)}{(\Delta_0 - \Delta_1)(Y_{\text{з}} + Y_{\text{п}})} \right|^2; \quad \Pi_{\text{пр}} \leq 1. \quad (5.18)$$

Полная передача мощности из падающей волны давления в электрическую нагрузку пьезоприемника реализуется при выполнении условий согласования  $\operatorname{Re} Y_{\text{з}} = \operatorname{Re} Y_{\text{п}}$ ,  $\operatorname{Im}(Y_{\text{з}} + Y_{\text{п}}) = 0$ ,  $\Pi_{\text{пр}} = 1$ , которые полностью аналогичны условиям (5.7).

Если напряжение падающей волны произвольно зависит от времени  $\sigma_0(t)$  или задано произвольным спектром  $\sigma_0(\omega)$ , то можно ввести коэффициент передачи по энергии

$$\omega_{\text{пр}} = \frac{W_{\text{з}}}{W_{\text{ак}}} \int_0^{\infty} |\sigma_0(\omega)|^2 \Pi_{\text{пр}}(\omega) d\omega / \int_0^{\infty} |\sigma_0(\omega)|^2 d\omega.$$

Из решения рассмотренной задачи можно также определить входной импеданс пьезоактивного слоя, произвольным образом нагруженного с электрической стороны на проводимость  $Y_{\text{з}}$ , а с тыльной грани — на акустическое сопротивление  $z_{\text{а}}^-$

$$\tilde{z}_{\text{п}} = z_{\text{п}} - \frac{1 - a^2 v^- - \gamma(1-a)[3 + v^- - a(1 + 3v^-)]}{1 + a^2 v^- - \gamma(1-a^2)(1 + v^-)}; \quad (5.19)$$

$$\gamma = \frac{\beta}{2ikd} \frac{Y_{\text{з}}}{Y_{\text{з}} + i\omega C_{\text{п}}}, \quad d = 2l.$$

В частном случае пассивного слоя  $\beta = 0$  или ненагруженного пьезоактивного слоя  $Y_3 = 0$  входной импеданс равен

$$\tilde{z}_n = z_n \frac{1 - a^2 v^-}{1 + a^2 v^-}. \quad (5.20)$$

Выражения (5.19) — (5.20) необходимы для обобщения расчетной схемы на слоистый преобразователь произвольной структуры.

В целом выражения (5.16) — (5.20) полностью описывают преобразователь в режиме приема при произвольной нагрузке с электрической и акустической сторон.

Укажем важное следствие, вытекающее из анализа (5.16). Максимум чувствительности пьезоприемника имеет место на антирезонансных частотах

$$\checkmark (v_{\text{пр}})_{\text{max}} = \left( \frac{2e_{33}}{e_{33}^s \pi z_a^+ f} \right)_{f=f_a}; \quad f_a = \frac{c_{11}}{4l} (2n + 1). \quad (5.21)$$

Из (5.21) следует, что чувствительность пьезоприемника максимальна на основной частоте антирезонанса и убывает с ростом номера гармоники. Низкочастотный предел чувствительности

$$(v_{\text{пр}})_0 = \frac{2e_{33}l}{e_{33}^s c_{11} z_n} = \frac{e_{33}}{2e_{33}^s z_n f_n}, \quad (5.22)$$

т. е. предельная чувствительность пьезоприемника определяется только его параметрами и не зависит от параметров рабочей среды, из которой падает звуковая волна.

Характеристики, определяемые выражениями (5.21) — (5.22), связаны соотношением  $(v_{\text{пр}})_{\text{max}} = (v_{\text{пр}})_0 (8/\pi^2) Q_m$ ;  $Q_m = -\pi/l \pi v^+ v^- = \pi/\alpha_a^+$ , где  $Q_m$  — механическая добротность одно-сторонне нагруженного пьезоприемника на антирезонансной частоте.

**Эхо-режим.** Для оценки совместной работы преобразователя в режиме излучения — приема (эхо-режима) амплитуду падающей волны  $\sigma_0$  в выражении (5.15) берут из решения (5.3). В результате получают

$$U'_n = \frac{\beta}{2\pi} (1 - |v^+|^2) \omega_n C_n U_r \frac{(1-a)^2 (1-av^-)^2 k_n}{(\Delta_0 - \Delta_1)^2 (Y_3 + Y_n)}. \quad (5.23)$$

Эхо-чувствительность как отношение напряжения на разомкнутом пьезоприемнике к напряжению на преобразователе в режиме излучения определяется выражением

$$v_{\text{эхо}} = \left| \frac{U'_n}{U_n} \right| = \frac{\beta}{2\pi} (1 - |v^+|^2) \frac{\omega_n}{\omega} \left| \frac{(1-a)^2 (1-av^-)^2}{\Delta_0 (\Delta_0 - \Delta_1)} \right|. \quad (5.24)$$

**Слоистый преобразователь произвольной структуры (режим излучения).** Формулы, полученные для режима излучения колебательной системы типа пластин, справедливы и в общем случае, когда нагрузочные сопротивления  $z_a^\pm$  являются входными импедансами произвольных слоистых структур. Алгоритм обоб-

щения формул использует выражение (5.20), если слой пассивен, и (5.19), если слой пьезоактивен и нагружен на пассивную электрическую цепь.

**Пример.** Торцы активного элемента  $z = l$  нагружен на система слоев, заданных каждый волновым сопротивлением  $z_i$ , скоростью звука  $c_i$  и толщиной  $d_i$  ( $i = 1 \div (m-1)$ ); наружный слой  $i = m-1$  нагружен на полупространство с волновым сопротивлением  $z_m$ . Алгоритм обобщения импеданса  $z_a^+$  описывается последовательностью формул

$$\left. \begin{aligned} \bar{z}_1^+ &= \bar{z}_1 = z_1 \frac{1 - a_1^2 \bar{v}_{12}}{1 + a_1^2 \bar{v}_{12}}; & \bar{v}_{12} &= \frac{z_1 - \bar{z}_2}{z_1 + \bar{z}_2}; \\ \bar{z}_2 &= z_2 \frac{1 - a_2^2 \bar{v}_{23}}{1 + a_2^2 \bar{v}_{23}}; & \bar{v}_{23} &= \frac{z_2 - \bar{z}_3}{z_2 + \bar{z}_3}; \\ \bar{z}_{m-1} &= z_{m-1} \frac{1 - a_{m-1}^2 v_{m-1, m}}{1 + a_{m-1}^2 v_{m-1, m}}; & v_{m-1, m} &= \frac{z_{m-1} - z_m}{z_{m-1} + z_m}; \\ & & a_i &= e^{-ik_i d_i}. \end{aligned} \right\} (5.25)$$

Аналогично записывается алгоритм обобщения импеданса  $z_a^+$  если в системе слоев имеются пьезоактивные. Для каждого такого слоя в соответствии с (5.19) дополнительно задают  $\beta_i$ ,  $C_{ni} Y_{si}$ .

Указанная процедура обобщения импедансов достаточна для обобщения формул (5.3), (5.5). Для определения чувствительности слоистого преобразователя нужно пересчитать напряжения, определенные (5.3), на излучающий торцы преобразователя  $z = l_{m-1}$ , нагруженный непосредственно на рабочую среду.

Коэффициент передачи  $i$ -го слоя по напряжениям

$$k_{\sigma i} = \frac{\sigma(l_i)}{\sigma(l_{i-1})}; \quad l_0 = l.$$

Для пассивного слоя  $k_{\sigma i}$  определяется выражением

$$k_{\sigma i} = a_i \frac{1 - \bar{v}_{i, i+1}}{1 - a_i^2 \bar{v}_{i, i+1}}; \quad (5.26)$$

$$\bar{v}_{i, i+1} = \frac{z_i - \bar{z}_{i+1}}{z_i + \bar{z}_{i+1}};$$

$$v_{m-1, m} = \frac{z_{m-1} - z_m}{z_{m-1} + z_m};$$

Для пьезоактивного слоя соответственно

$$k_{\sigma i} = \frac{a_i (1 - \bar{v}_{i, i+1})}{1 - a_i^2 \bar{v}_{i, i+1}} \left\{ 1 - \gamma_i (1 - a_i)^3 \frac{1 - a_i^{-1} \bar{v}_{ii}}{(1 - \bar{v}_{ii}) [a_i - \gamma_i (1 - a_i^2)]} \right\} \quad (5.27)$$

$$\gamma_i = \frac{\beta_i}{2ik_i d_i} \frac{Y_{si}}{i\omega C_{ni} + Y_{si}}; \quad \bar{v}_{ii} = \frac{z_{ni} - \bar{z}_{ni}}{z_{ni} + \bar{z}_{ni}},$$

а обобщенный импеданс пьезоактивного слоя  $\hat{z}_{ni}$  при электрической нагрузке определяется выражением (5.19).

С учетом пересчета напряжений (5.4) принимает вид

$$\frac{\sigma(l_{m-1})}{U_n} = \frac{e_{33}}{2l} \frac{\alpha_a^+}{1 + \alpha_a^+} \frac{(1-a)(1-av^-)}{\Delta_0 - \Delta_1} \prod_{i=1}^{m-1} k_{\sigma i}. \quad (5.28)$$

При обобщении (5.6) следует учесть возможные потери энергии в электрической нагрузке пьезоактивных слоев, что производится введением коэффициента передачи слоя по энергии

$$\Pi_i = 1 - \frac{\beta_i}{\pi} \frac{\operatorname{Re} Y_{\sigma i}}{\omega_{ni} C_{ni}} \frac{1}{|1 - |\bar{v}_{ii}|^2|} \left| \frac{(1-a_i)(a_i - v_{ii}) \omega_{ni} C_{ni}}{[(a_i - \bar{v}_{ii})(1-a_i^2)](i\omega C_{ni} + Y_{\sigma i})} \right|^2. \quad (5.29)$$

С учетом (5.29) записывается обобщение (5.6)

$$\Pi_n = \frac{\beta}{\pi} (1 - |v^+|^2) R_r \omega_n C_n \left| \frac{(1-a)(1-av^-) k_n}{\Delta_0 - \Delta_1} \right|^2 \prod_{i=1}^{m-1} \Pi_i. \quad (5.30)$$

Слоистые системы в структуре пьезопреобразователя используются, как правило, для расширения его функциональных возможностей и чаще всего для расширения полосы пропускания. В отличие от излучателя пьезоприемник является заведомо широкополосным в дорезонансной области, поэтому применение слоистых пьезоприемников нецелесообразно.

**Электрические корректирующие (согласующие) цепи.** Преобразователь подключается к генератору (приемнику) через электрические цепи, которые либо выполняют функции согласования, если преобразователь является резонансным, либо используются для коррекции частотной характеристики чувствительности (излучаемой мощности).

Для выполнения условий (5.7) электрическая цепь должна иметь компенсирующую индуктивность и сопротивление (сопротивление генератора в режиме излучения), перестраиваемые в заданных пределах либо непосредственно, либо с помощью согласующего трансформатора.

Для преобразователей широкополосного типа целесообразно использовать более сложные корректирующие цепи — фильтры лестничного типа (ФЛТ) или фильтры низких частот (ФНЧ). Пример включения преобразователя в цепь генератора через многозвенный ФЛТ поясняется рис. 5.1.

Для такого звена выражение для  $k_n$  имеет вид

$$k_n = 1 + z_{s2}(Y_1 + Y'_n) + (Q_n + z_{s4})[Y_1 + Y_3 + Y'_n + z_{s2}Y_3(Y_1 + Y'_n)];$$

где  $Q_n = R_r \omega_n C_n$ ;  $Y'_n = Y_n / \omega_n C_n$ ;  $Y_1 = -i(m_1^2 / \bar{\omega})$ ;  $\bar{\omega} = \omega / \omega_n$ ;  $Y_3 = -i\alpha_3(m_3^2 / \bar{\omega} - \bar{\omega})$ ;  $z_{s2} = i/\alpha_k(\bar{\omega}/m_k^2 - 1/\bar{\omega})$ ;  $k = 2, 4$ ;  $\alpha_{si} = C_i/C_n$ ;  $m_i = \omega_{si}/\omega_n$ ;  $\omega_{si}^2 = 1/L_i C_i$ .

Учет дифракции при задании акустической нагрузки преобразователя. Преобразователь типа тонкого стержня имеет по определению поперечные размеры, малые по сравнению с длиной волны. Из теории излучения круглого поршня в экране или без него известно, что сопротивление излучения малого излучателя зависит от частоты и может быть существенно меньшим по сравнению с предельным значением на высоких частотах, когда удельное сопротивление излучения становится равным волновому сопротивлению среды

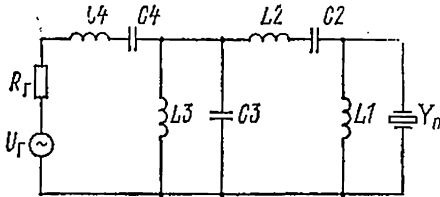


Рис. 5.1. Схема электрической коррекции с фильтром лестничного типа (ФЛТ).

Уменьшение сопротивления излучения на низких частотах приводит к уменьшению акустической нагруженности преобразователя и соответственно к увеличению максимума активной проводимости с одновременным сужением полосы и уменьшением КПД.

Сопротивление излучения круглого торца стержневого преобразователя можно получить из решения задачи на излучение круглого поршня с фиксированной тыльной гранью [115].

**Пример.** В численных расчетах используется следующее представление сопротивления  $z_a^+$ , (или  $z_m$  в случае сложного преобразования) при нагрузке на полупространство с параметрами  $\rho_a, c_a$ :

$$z_a^+ = \rho_a c_a z_R; \quad z_R = \text{Re } z_R + i \text{Im } z_R;$$

$$\text{Re } z_R = 0,119ka + 0,09067 (ka)^2 + 0,044 (ka)^3 + 0,005334 (ka)^4; \quad 0 \leq ka \leq 2;$$

$$\text{Re } z_R = 0,558 + 1,2753 (ka - 1,5) - 0,5973 (ka - 1,5)^2 - 0,1013 (ka - 1,5)^3 + \\ + 0,06933 (ka - 1,5)^4; \quad 2 \leq ka \leq 3,5;$$

$$\text{Re } z_R = 1 + \exp(-1,148ka); \quad ka > 3,5;$$

$$\text{Im } z_R = 0,7903ka - 0,3233 (ka)^2 + 0,1787 (ka)^3 + 0,05867 (ka)^4; \quad 0 \leq ka \leq 2;$$

$$\text{Im } z_R = 0,587 + 0,1307 (ka - 1) + 1,018 (ka - 1)^2 - 1,327 (ka - 1)^3 + \\ + 0,3693 (ka - 1)^4; \quad 2 \leq ka \leq 3;$$

$$\text{Im } z_R = 9,158 (ka)^{-3,415}; \quad ka > 3; \quad k = \omega/c_a.$$

## § 5.5. Преобразователь типа протяженного (короткого) цилиндра

**Модели преобразователя.** Радиальная мода колебаний протяженного (короткого) цилиндра может возбуждаться тремя различными способами, чему соответствуют осевая, радиальная

и тангенциальная поляризации; каждому виду поляризации соответствует своя модель преобразователя — физическая и математическая.

При переходе от протяженного цилиндра к короткому математическое описание колебаний в пределах каждого типа поляризации сохраняется, заменяются только физические параметры, описывающие пьезоэффект и свойства упругости. Ниже приводится описание трех моделей.

Преобразователь с осевой поляризацией,  $D = D_z$ ,  $E = E_z$ ,  $u = u_r$ . Для протяженного цилиндра основная система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r + k^2 \right) u &= 0; \quad k = \omega/c_n; \quad c_n = \sqrt{C_{11}^E/\rho}; \quad \beta = e_{31}^2/e_{33}^s C_{11}^E \\ \sigma_{rr} &= C_{11}^E \frac{\partial u}{\partial r} + C_{12}^E \frac{u}{r} - e_{31} E; \quad D = e_{33}^s E + e_{31} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r u; \\ \frac{\partial D}{\partial z} &= 0; \quad D = D(r); \quad \frac{\partial E}{\partial r} = 0; \quad E = E_0 = \text{const}. \end{aligned}$$

В случае короткого цилиндра следует сделать замену

$$\begin{aligned} C_{11} &\rightarrow C_{11} - C_{13}^2/C_{33}; \quad C_{12} \rightarrow C_{12} - (C_{13}^2/C_{33}); \\ e_{31} &\rightarrow e_{31} - e_{33} (C_{13}/C_{33}). \end{aligned}$$

Преобразователь с радиальной поляризацией,  $D = D_r$ ,  $E = E_r$ . Для протяженного цилиндра основная система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{p^2}{r^2} + k^2 \right) u + \frac{e_{31}}{e_{33}^s C_{33}^D} \frac{D}{r} &= 0; \\ k &= \omega/c_n \quad c_n = \sqrt{C_{33}^D/\rho}, \\ p^2 &= \frac{C_{11}^E}{C_{33}^D} + \beta; \quad \beta = \frac{e_{31}^2}{e_{33}^s C_{33}^D}; \quad C_{33}^D = C_{33}^E + e_{33}^2/e_{33}^s; \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= C_{33}^E \frac{\partial u}{\partial r} + C_{13}^E \frac{u}{r} - e_{31} E; \quad D = e_{33}^s E + e_{33} \frac{\partial u}{\partial r} + e_{31} \frac{u}{r}; \\ \frac{\partial}{\partial r} r D &= 0; \quad D = \frac{D_0}{r}; \quad D_0 = \text{const}; \quad E = E(r). \end{aligned}$$

В случае короткого цилиндра следует сделать замену

$$\begin{aligned} C_{33} &\rightarrow C_{33} - C_{13}^2/C_{11}; \quad C_{13} \rightarrow C_{13} (1 - C_{12}/C_{11}); \quad C_{11} \rightarrow C_{11} (1 - C_{12}^2/C_{11}^2); \\ e_{33} &\rightarrow e_{33} - e_{31} C_{13}/C_{11}; \quad e_{31} \rightarrow e_{31} (1 - C_{12}/C_{11}) \end{aligned}$$

Преобразователь с тангенциальной поляризацией,  $D = D_\theta$ ,  $E = E_\theta$ . Для протяженного цилиндра основ-



ная система уравнений имеет вид

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{p^2}{r^2} + k^2\right) u + \frac{e_{33}}{C_{11}^E} \frac{E}{r} = 0; \quad k = \omega/c_n;$$

$$c_n = \sqrt{C_{11}^E/\rho};$$

$$p^2 = C_{33}^E/C_{11}^E; \quad \beta = e_{33}^2/\epsilon_{33}^s C_{11}^E;$$

$$\sigma_{rr} = C_{11}^E \frac{\partial u}{\partial r} + C_{13}^E \frac{u}{r} - e_{31} E; \quad D = \epsilon_{33}^s E + e_{33} \frac{u}{r} + e_{31} \frac{\partial u}{\partial r};$$

$$D = D(r); \quad E = E_0/r; \quad E_0 = \text{const.}$$

В случае короткого цилиндра следует сделать замену

$$C_{11} \rightarrow C_{11} - C_{12}^2/C_{11}; \quad C_{13} \rightarrow C_{13}(1 - C_{12}/C_{11}); \quad C_{33} \rightarrow C_{33} - C_{12}C_{13}/C_{11};$$

$$e_{31} \rightarrow e_{31}(1 - C_{12}/C_{11}); \quad e_{33} \rightarrow e_{33} - e_{31}C_{13}/C_{11}.$$

**Режим излучения.** В качестве примера рассмотрим работу преобразователя типа протяженного цилиндра с радиальной поляризацией.

В этом случае к основным уравнениям (5.31) следует добавить граничные условия

Основные характеристики преобразователя имеют вид

$$r = a(1 \pm h_1); \quad \sigma_{rr} \pm z_a^+ \frac{\partial u}{\partial t} = 0; \quad Y_s U_n S^+ \frac{\partial D}{\partial t}, \quad (5.32)$$

где  $a$  — средний радиус цилиндра;  $2h_1$  — толщина стенки цилиндра, нормированная на средний радиус;  $S^+$  — наружная поверхность цилиндра;  $z_a^\pm$  — акустические сопротивления нагрузок на поверхностях  $r = a(1 \pm h_1)$ .

$$\frac{\sigma_{rr}^+}{U_n} = \frac{e_{31} i k a^+}{\ln \frac{1+h_1}{1-h_1}} \frac{F_n}{\Delta_0(1-\Delta_2) - \Delta_1} = v_n e^{i\Phi_n};$$

$$F_n = (c_2 a_{12} - c_1 a_{22}) J_p^+ + (c_1 a_{21} - c_2 a_{11}) N_p^+ + \frac{\pi}{2} \Delta_0 (p_N^+ J_p^+ - p_J^+ N_p^+);$$

$$a_{11} = (J_p^+)' + \frac{C_{13}^D}{C_{33}^D} \frac{J_p^+}{x^+} + i\alpha_a^+ J_p^+;$$

$$a_{12} = (N_p^+)' + \left( \frac{C_{13}^D}{C_{33}^D} \frac{1}{x^+} + i\alpha_a^+ \right) N_p^+; \quad (5.33)$$

$$a_{21} = (J_p^-)' + \left( \frac{C_{13}^D}{C_{33}^D x^-} - i\alpha_a^- \right) J_p^-; \quad a_{22} = (N_p^-)' + \left( \frac{C_{13}^D}{C_{33}^D x^-} - i\alpha_a^- \right) N_p^-;$$

$$c_1 = \frac{\pi}{2} (p_N^+ a_{11} - p_J^+ a_{12}) - \eta/x^+; \quad c_2 = -\eta/x^-; \quad x^\pm = ka(1 \pm h_1);$$

$$\eta = e_{33}/e_{31}; \quad P_N = \int_{x^-}^{kr} \frac{N_p(x)}{x} dx;$$

$$p_J = \int_{x^-}^{kr} \frac{J_p(x)}{x} dx; \quad J_p^\pm = J_p(x^\pm); \quad (J_p)' = \frac{dJ_p(x)}{dx};$$

$$\Delta_0 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

$$\Delta_1 = \frac{\beta\eta}{\ln \frac{1+h_1}{1-h_1}} [(c_2a_{12} - c_1a_{22})(J_p^+ - J_p^- - p_J^+/\eta) + (c_1d_{21} - c_2a_{11})(N_p^+ - N_p^- - p_N^+/\eta)];$$

$$\Delta_2 = \frac{\pi}{2} \frac{\rho h}{\ln \frac{1+h_1}{1-h_1}} [p_N^+ J_p^+ - p_J^+ N_p^+ + \frac{1}{\eta} S_{x^-}^{s+} (\rho_N J_p - p_J N_p) \frac{dx}{x}];$$

$$Y_n = i\omega C_n \frac{\Delta_0}{\Delta_1(1-\Delta_2) - \Delta_1}; \quad C_n = \frac{e_{33}^s S^+}{\alpha(1+h_1) \ln \frac{1+h_1}{1-h_1}}; \quad (5.34)$$

$$P_n = 4\beta R_r \omega_n C_n \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \frac{1+h_1}{\ln \frac{1+h_1}{1-h_1}} \left| \frac{F_n k_n}{\Delta_0(1-\Delta_2) - \Delta_1} \right|^2 \operatorname{Re} \alpha_a^+, \quad (5.35)$$

$$\text{где } k_n = [1 + R_r(Y_n + Y_n)]^{-1}; \quad \omega_n = c_n/a; \quad \alpha_a^+ = z_a^+/z_n.$$

— уравнение собственных частот преобразователя в режиме холостого хода

$$\Delta_0 = 0; \quad (5.36)$$

— уравнение собственных частот преобразователя в режиме короткого замыкания

$$\Delta_0(1-\Delta_2) - \Delta_1 = 0; \quad (5.37)$$

— уравнение собственных частот преобразователя, нагруженного с электрической стороны на проводимость  $Y_n$ ,

$$Y_n + Y_n = 0. \quad (5.38)$$

К основным характеристикам и уравнениям (5.33)–(5.38) можно добавить характеристики (5.8), (5.12), причем при нагрузке цилиндрического преобразователя наружной поверхностью на свободное жидкое пространство с волновым сопротивлением  $\rho_a^+ c_a^+$  в формулах (5.12), (5.35) следует положить

$$\alpha_a^+ = \frac{\rho_a^+ c_a^+}{z_n} z_R; \quad z_R = i \frac{H_0^{(2)}(y^+)}{H_1^{(2)}(y^+)}; \quad y^+ = k^+ a(1+h_1); \quad k^+ = \omega/c_a^+. \quad (5.39)$$

**Режим приема.** Описание работы цилиндрического преобразователя в режиме приема не является однозначным и зависит от типа падающей волны и ее ориентации относительно оси цилиндра. При выводе основных соотношений будем считать, что на цилиндрический пьезоприемник падает плоская волна, волновой вектор которой перпендикулярен оси цилиндра. Симметричная составляющая в разложении плоской волны с амплиту-

дой  $\sigma_0$  в ряд по цилиндрическим волнам будет иметь амплитуду  $\sigma_0 J_0(k^+r)$ , при этом граничные условия к задаче (5.31) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} r &= a(1 + h_1); \\ \sigma_{rr} + z_a^+ \frac{\partial u}{\partial t} &= \sigma_0 \delta; \quad \delta = J_0(y^+) - J_1(y^+) \frac{H_0^{(2)}(y^+)}{H_1^{(2)}(y^+)}; \\ y^+ &= k^+ a(1 + h_1) \\ r &= a(1 - h_1); \\ \sigma_{rr} = z_a^- \frac{\partial u}{\partial t} &= 0; \quad U_n Y_s + S \frac{\partial D}{\partial t} = 0. \end{aligned} \right\} (5.40)$$

Основные характеристики преобразователя в режиме приема имеют вид

$$U_n' = \sigma_0 i \frac{e_{31}}{e_{33}^s} \frac{C_n}{z_n} \frac{\delta F_{np}}{[\Delta_0(1 - \Delta_2) - \Delta_1](Y_s + Y_n)}; \quad (5.41)$$

где

$$\begin{aligned} F_{np} &= a_{22} P_J^+ - a_{21} P_N^+ + \eta [a_{22}(J_p^+ - J_p^-) - a_2(N_p^+ - N_p^-)]; \\ \left( \frac{U_n'}{\sigma_0} \right)_{x, x} &= \frac{e_{31}}{e_{33}^s} \frac{\delta}{z_n} \frac{F_{np}}{\omega \Delta_0} = v_{np} e^{i\Phi_{np}}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Коэффициент передачи по мощности в режиме приема определяется как отношение мощности, переданной в электрическую нагрузку пьезоприемника, к мощности, переносимой падающей плоской волной через поперечное сечение цилиндра:

$$\Pi_{np} = \beta \pi \frac{\rho_a^+ c_a^+}{Z_n} \frac{\omega_n C_n \operatorname{Re} Y_s}{(1 + h_1) \ln \frac{1 + h_1}{1 - h_1}} \cdot \left[ \frac{\delta F_{np}}{[\Delta_0(1 - \Delta_2) - \Delta_1](Y_s + Y_n)} \right]^2. \quad (5.43)$$

В дополнение к характеристикам (5.41) и (5.43) следует ввести характеристику  $\omega_{np}$  для широкополосного возбуждения пьезоприемника.

**Слоистый цилиндрический преобразователь произвольной радиальной структуры (режим излучения).** Приведенные выше формулы можно обобщить на случай слоистого преобразователя, если под импедансами  $z_a^+$  понимать входные импедансы произвольных слоистых структур, пассивных или пьезоактивных, с пассивными электрическими цепями, заданными своей проводимостью  $Y_s$ .

Входной импеданс пьезоэлектрического слоя, заданного средним радиусом  $a$ , относительной толщиной стенки  $h_1$ , проводимостью электрической нагрузки  $Y_s$  и акустической нагрузкой на наружной поверхности  $z_a^+$ , определяется со стороны внутрен-

ней поверхности формулой

$$\bar{z}_n = z_n i \Delta_0 [(1 - \gamma c_2)(a_{11} N_p^- - a_{12} J_p^-) + \gamma c_1 (a_{21} N_p^- - a_{22} J_p^-)]^{-1}, \quad (5.44)$$

где

$$\gamma = \beta \frac{Y_3}{\ln \frac{1+h_1}{1-h_1}} \frac{\eta [a_{11}(N_p^+ - N_p^-) - a_{12}(J_p^+ - J_p^-)] + a_{11} P_N^+ - a_{12} P_J^+}{Y_3 [\Delta_0 (1 - \Delta_2) - \Delta_1] + i \omega C_n \Delta_0}.$$

В частных случаях  $\beta = 0$ ,  $Y_3 = 0$  получаем формулу для входного импеданса пассивного слоя или ненагруженного с электрической стороны пьезоактивного слоя

$$\bar{z}_n = z_n i \Delta_0 (a_{11} N_p^- - a_{12} J_p^-)^{-1}. \quad (5.45)$$

В случае пассивного слоя нужно положить  $p = 1$  и заменить параметры  $\beta$ ,  $c_n$  пьезоматериала параметрами  $\rho_c$ ,  $c_c$  слоя.

Коэффициент передачи слоя (в общем случае пьезоактивного) по напряжению определяется формулой

$$k_\sigma = \frac{\sigma(a(1+h_1))}{\sigma(a(1-h_1))} = \alpha_a^+ \left\{ i(a_{12} J_p^+ - a_{12} N_p^+) - \frac{Y_3}{\omega_n c_n} \frac{e_{31}}{a} \left( \frac{U'_n}{\sigma_0} \right) \right\}, \quad (5.46)$$

где

$$\left( \frac{U'_n}{-\sigma_0} \right) = \frac{e_{31} a i \omega_n C_n \eta [a_{11}(N_p^+ - N_p^-) - a_{12}(J_p^+ - J_p^-)] + a_{11} P_N^+ - a_{12} P_J^+}{e_{33}^s z_n c_n Y_3 [\Delta_0 (1 - \Delta_2) - \Delta_1] + i \omega C_n \Delta_0}.$$

Коэффициент передачи слоя по энергии определяется формулой

$$\Pi = 1 - \left| \frac{U'_n}{-\sigma_0} \right|^2 \frac{|\bar{z}_n|^2}{S_n^-} \frac{\operatorname{Re} Y_3}{\operatorname{Re} \bar{z}_n}. \quad (5.47)$$

Формулы (5.44)–(5.47) позволяют обобщить формулы (5.33), (5.38) на случай цилиндрического преобразователя произвольной радиальной структуры, содержащей активный элемент и систему слоев с наружной стороны пьезоэлемента, при этом последний пьезоэлемент нагружен на среду с волновым сопротивлением  $z_m$ :

$$\frac{\sigma_{rr}^+}{U_n} = \frac{e_{31} i k \alpha_a^+}{\ln \frac{1+h_1}{1-h_1}} \frac{F_n}{\Delta_0 (1 - \Delta_2) - \Delta_1} \prod_{i=1}^{m-1} k_{\sigma i}; \quad (5.48)$$

$$\Pi_n = 4\beta R_r \omega_n C_n \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \left| \frac{1+h_1}{\ln \frac{1+h_1}{1-h_1}} \right| \left| \frac{F_n k_n}{\Delta_0 (1 - \Delta_2) - \Delta_1} \right|^2 \operatorname{Re} \alpha_a^+ \prod_{i=1}^{m-1} (\Pi_i). \quad (5.49)$$

Кроме наружных слоев преобразователь может иметь внутреннее заполнение — однородное или в виде системы слоев (пассивных или пьезоактивных). Такое заполнение в общем слу-

чае увеличивает механическую прочность преобразователя, но может использоваться и для коррекции частотных характеристик.

Входной импеданс внутреннего заполнения в виде однородной среды с параметрами  $\rho^-$ ,  $c_L^-$ ,  $c_t^-$  (где  $c_L^-$ ,  $c_t^-$  — скорости продольной и поперечной волн в среде) определяется выражением

$$z_a^- = -i\rho^-c_L^- \left\{ \frac{J_0(k^-a(1-h_1))}{J_1(k^-a(1-h_1))} - 2\left(\frac{c_t^-}{c_L^-}\right)^2 \frac{1}{k^-a(1-h_1)} \right\}; \quad k^- = \omega/c_L^- \quad (5.50)$$

Если внутреннее заполнение является слоистым, то для обобщения импеданса  $z_a^-$  нужно ввести входной импеданс  $i$ -го слоя, нагруженного внутренней поверхностью на импеданс  $z_{i+1}^- [i = 1 \div + (n-1)]$ :

$$\bar{z}_i^- = -\rho_i c_{Li} \Delta_0 (a_{21} N_{1i}^+ - a_{22} J_{1i}^+)^{-1}, \quad (5.51)$$

где  $\Delta_0 = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$ ;  $a_{11} = J_{0i}^+ - J_{1i}^+ \frac{2\nu_i^2}{x_i^+}$ ;  $a_{12} = N_{0i}^+ - N_{1i}^+ (2\nu_i^2/x_i^+)$ ,

$a_{21} = J_{0i}^- - J_{1i}^- [(2\nu_i^2/x_i^-) + i\alpha_{i+1}^-]$ ;  $a_{22} = N_{0i}^- = N_{1i}^- [(2\nu_i^2/x_i^-) + i\alpha_{i+1}^-]$ ;  $J_{0i}^\pm = J_0(x_i^\pm)$ ;  $J_{1i}^\pm = J_1(x_i^\pm)$ ;  $N_{0i}^\pm = N_0(x_i^\pm)$ ;  $N_{1i}^\pm = N_1(x_i^\pm)$ ;  $x_i^\pm = k_i r_i^\pm$ ;  $k_i = \omega/c_{Li}$ ;  $\nu_i = c_{ti}/c_{Li}$ ;  $\alpha_{i+1}^- = t_{in}/z_c$ ;  $r_i^\pm$  — радиус внутренней и наружной поверхностей  $i$ -го слоя.

Применяя последовательно формулы (5.50), (5.51) к системе слоев, можно получить выражение для входного импеданса произвольной пассивной слоистой системы.

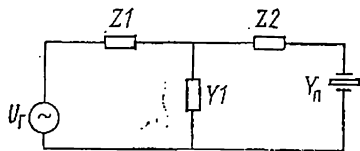


Рис. 5.2. Схема электрической коррекции с фильтром нижних частот (ФНЧ).

**Электрические корректирующие цепи.** В случае цилиндрического преобразователя целесообразно применять корректирующие цепи типа фильтров низкой частоты. Соответствующая схема включения преобразователя представлена на рис. 5.2.

Коэффициент передачи по напряжению в режиме излучения имеет вид

$$k_n = [1 + z_1 Y_1 + Y_n (z_1 + z_2 + z_1 z_2 Y_1)]^{-1}. \quad (5.52)$$

В случае фильтров низкой частоты нужно положить  $z_1 = R_r + i\omega L_1$ ;  $z_2 = R_2 + i\omega L_2$ ;  $Y_1 = i\omega C_1$ , а задачу электрической коррекции характеристик конкретного преобразователя с проводимостью  $Y_n$  в заданном диапазоне частот свести к определению значений  $R_r$ ,  $R_2$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $C_1$ .

**Учет дифракции при задании акустической нагрузки цилиндрического преобразователя.** Если цилиндрический преобразова-

тель достаточно протяженный, то дифракционный множитель  $z_R$  находится из решения задачи на излучение бесконечно протяженного пульсирующего цилиндра и имеет вид

$$z_{R, \infty} = iH_0^{(2)}(k^+a(1+h_1))/H_1^{(2)}(k^+a(1+h_1)); \quad k^+ = \omega/c^+.$$

Если преобразователь является одиночным, то его геометрические размеры, как правило, соизмеримы, а поправочный множитель для определения акустической нагруженности преобразователя следует брать из решения соответствующей задачи на излучение пульсирующего цилиндра конечной высоты.

С достаточной для практики точностью сопротивление излучения цилиндра наружным радиусом  $a_1 = a(1+h_1)$  и высотой  $2l < 2a_1$  можно определить из решения задачи на излучение сферического слоя высотой  $2l_2 = 2a_2 \cos \theta$  ( $\theta = \arctg a_1/l$ ), пульсирующего на жесткой сфере радиусом  $a_2 = a_1(1+l^2/a_1^2)^{1/4}$ .

Расчетное выражение для дифракционного множителя имеет вид

$$z_{R, c} = \frac{l}{\cos \theta} \sum_m \frac{[P_{m+1}(x) - P_{m-1}(x)]^2}{2m+1} \frac{h_m^{(2)}(k^+a_2)}{h_m'^{(2)}(k^+a_2)}, \quad (5.53)$$

где  $x = \cos \theta$ ;  $m = 0, 2, 4 \dots$ ;  $h_m'(x) = dh_m(x)/dx$ ;  $P_m(x)$  — полиномы Лежандра;  $h_m(x)$  — сферические функции Ганкеля.

Если продольный размер цилиндра достаточно велик ( $l > a_1$ ), то дифракционный множитель следует определить из решения задачи на излучение пульсирующего кольца на абсолютно жестком цилиндрическом экране [35]:

$$\left. \begin{aligned} z_{R, \Pi} &= Z_{R, \infty} Z_{\Pi}; \\ z_{\Pi} &= h + ig; \quad h = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)(n+1)(n!)^2}; \\ g &= \frac{2x}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi(n) - \ln x}{(2n+1)(n+1)(n!)^2} x^{2n}; \quad x = k^+l_1; \\ \varphi(n) &= -0,57723 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \frac{1}{n+1} \frac{4n+3}{4n+2}. \end{aligned} \right\} (5.54)$$

Учет дифракции в общем случае изменяет основные характеристики преобразования аналогично тому, как было отмечено для преобразователя типа тонкого стержня, а ее учет особенно важен при оценке характеристик широкополосных излучающих систем на основе цилиндрического пьезоэлемента.

### МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ И АНАЛИЗА ШИРОКОПОЛОСНЫХ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

#### § 6.1. Постановка задачи. Сравнительные энергетические оценки

Разработка широкополосного пьезопреобразователя по заданной полосе пропускания сводится прежде всего к выбору способа расширения полосы пропускания и структуры корректирующего (согласующего) звена. При выборе способа следует учитывать, что расширение полосы пропускания неизбежно связано с потерями энергии, так как условие энергетического согласования преобразователя с источником возбуждения, возможное на любой фиксированной частоте, становится лишь частичным в полосе частот, и чем шире полоса пропускания, тем меньше коэффициент передачи по мощности (энергии).

Кроме того, уменьшение коэффициента передачи по мощности реального преобразователя связано с наличием потерь (электрических и механических) в материале преобразователя, элементах крепления и т. д. Для корректной оценки потерь необходимы измерения их на ряде частот с последующей аппроксимацией на рабочую полосу частот конкретного преобразователя. Учет реальных потерь в расчетной схеме широкополосного преобразователя сводится тогда к расчету частотной зависимости КПД преобразователя с последующим определением полосы на частотной характеристике КПД.

Если учтена зависимость коэффициента потерь от частоты (линейная или квадратичная), то полоса пропускания, вычисленная на частотной характеристике КПД, примерно равна полосе пропускания, вычисленной на частотной характеристике коэффициента передачи по мощности идеального преобразователя без потерь при общем уменьшении уровня коэффициента передачи. С учетом этого при оценке широкополосности можно использовать расчетную схему идеального преобразователя без потерь, экспериментально определяя его КПД на средней частоте рабочей полосы.

Характерная особенность широкополосного преобразователя состоит в том, что он является сравнительно маломощным. Уменьшение предельной излучаемой мощности при переходе от резонансного режима, когда преобразователь полностью согласован с генератором на частоте максимума активной составляющей

щей проводимости, к широкополосному, когда согласование является лишь частичным, можно оценить коэффициентом энергоемкости для тонального возбуждения [52, 53]

$$K_0 = (\operatorname{Re} Y_{п, \min}) / (\operatorname{Re} Y_{п, \max}), \quad (6.1)$$

где  $\operatorname{Re} Y_{п, \min}$  — вычисляется в пределах полосы пропускания преобразователя;  $\operatorname{Re} Y_{п, \max}$  относится к тому же преобразователю, нагруженному на рабочую среду непосредственно, без согласующих слоев.

Для широкополосных преобразователей  $K_0 \ll 1$ , что говорит о нецелесообразности их использования для излучения тонального (узкополосного) сигнала. Наименьшие значения  $K_0$  относятся к преобразователям, полоса пропускания которых расширена методами электрической коррекции, наибольшие — к преобразователям, полоса пропускания которых расширена методами акустического согласования.

Эффективность работы широкополосного преобразователя повышается при излучении широкополосного сигнала. В этом случае мерой эффективности работы излучателя может служить коэффициент энергоемкости

$$K_{ш} = \frac{W_{ш}}{W_0} = G_{\min} \int_0^{\infty} \Pi_{ш}(\omega) d\omega / \int_0^{\infty} \Pi_0(\omega) d\omega, \quad (6.2)$$

где  $G_{\min} = (1/4) k_{н, \max}^{-2} = (1/4) U_r / U_n^2$ ;  $W_{ш}$  — энергия, излучаемая широкополосным излучателем с коэффициентом передачи по мощности  $\Pi_{ш}(\omega)$  при возбуждении  $\delta$ -импульсом напряжения;  $W_0$  — энергия, излучаемая резонансным преобразователем, с коэффициентом  $\Pi_0(\omega)$  согласованным с генератором на частоте максимума активной проводимости при том же типе импульса возбуждения;  $k_{н, \max}$  — максимальное значение коэффициента передачи по напряжению, вычисленное для широкополосного излучателя.

Коэффициент (6.2) характеризует идеализированный случай широкополосного возбуждения, каковым является возбуждение  $\delta$ -импульсом с равномерным спектром. Такая оценка эффективности не описывает все особенности работы преобразователя широкополосного типа, но представляется достаточно общей, так как не зависит от конкретного способа возбуждения.

Менее общие и более информативные оценки можно ввести при учете специфики работы конкретного преобразователя и особенностей источника возбуждения. Подобной оценкой может служить приведенный в (5.8) коэффициент передачи по энергии.

Формулы (5.8), (6.1), (6.2) дают достаточно полную энергетическую оценку работы широкополосного излучателя, позволяя сделать следующие выводы.

Коэффициент  $K_{ш}$ , вычисленный для различных преобразователей, полоса пропускания которых расширена методами элек-



трической коррекции и акустического согласования, близок к единице. Исключением служат преобразователи, полоса пропускания которых расширена многозвенными электрическими корректирующими фильтрами.

В предельном случае тонального (узкополосного) возбуждения частотные характеристики  $W_n(\omega)$  вырождаются в частотные характеристики  $\Pi_n(\omega)$ .

Конкретные примеры использования формул (5.8), (6.1), (6.2) для оценки работы широкополосных преобразователей приведены в [48, 53].

## § 6.2. Тракт излучения с электрической коррекцией

Наиболее просто реализуется способ расширения полосы пропускания, при котором между генератором и преобразователем помещается корректирующий четырехполюсник (пассивный или активный) с параметром  $k_n$ , определяемый условием

$$|k_n|^2 \operatorname{Re} Y_n = \text{const}; \quad |k_n| \sim (\operatorname{Re} Y_n)^{-\frac{1}{2}}. \quad (6.3)$$

Условие должно выполняться с точностью до заданной неравномерности в рабочей полосе.

В случае активного корректирующего звена, в качестве которого применяют усилитель с частотно-зависимой обратной связью, (6.3) удовлетворяет коэффициент усиления усилителя. В случае пассивного корректирующего звена (реактивный четырехполюсник типа фильтра низких частот или фильтра лестничного типа) выражению (6.3) удовлетворяет коэффициент передачи фильтра.

Принципиально коррекция частотной характеристики возможна в любом частотном диапазоне. Проще всего скорректировать частотную характеристику в дорезонансной области, включая окрестность основной резонансной частоты, причем для одиночного преобразователя типа стержня или короткого цилиндра учет дифракции необходим.

Наибольший интерес представляют корректирующие звенья простейшего вида, для которых возможен численный анализ в самом общем случае. В качестве исходной величины выбирается собственная полоса пропускания, определенная по частотной зависимости величины  $\operatorname{Re} Y_n$ . Среди сравниваемых преобразователей наибольшей собственной полосой пропускания обладают тонкостенные цилиндры, для которых полоса пропускания растет с уменьшением толщины стенки.

Для реализации потенциальной широкополосности целесообразно использовать корректирующие четырехполюсники типа многозвенного ФНЧ, причем однозвенный фильтр состоит из индуктивности и внутреннего сопротивления генератора, включенных последовательно с преобразователем [двухпараметровое корректирующее звено (см. рис. 5.2)].

Если относительная толщина стенки цилиндра достаточно мала ( $h_1 \leq 0,1$ ), то с помощью указанного звена получают полосу пропускания порядка одной декады и более. С увеличением толщины стенки и уменьшением высоты цилиндра уменьшается собственная широкополосность преобразователя, и для коррек-

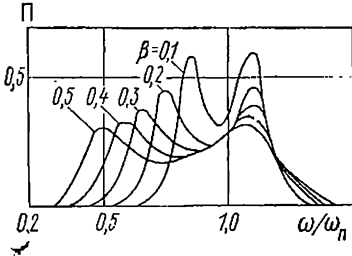


Рис. 6.1. Частотные характеристики пьезопреобразователя, нагруженного на воду, с двухпараметровым корректирующим звеном типа ФЛТ.

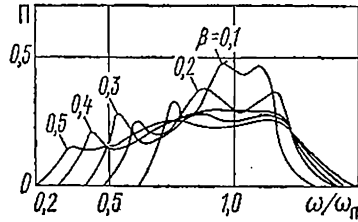
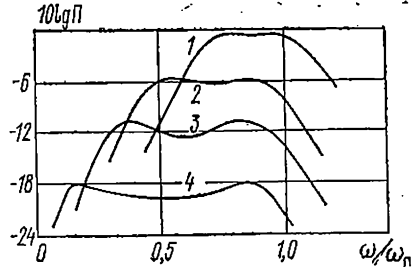


Рис. 6.2. Частотные характеристики пьезопреобразователя, нагруженного на воду, с четырехпараметровым корректирующим звеном типа ФЛТ.

ции его частотной характеристики следует применять многозвенные ФНЧ. Толстостенные цилиндрические преобразователи типа стержней (пластин) обладают сравнимой собственной широкополосностью, составляющей для промышленных пьезоматериа-

Рис. 6.3. Частотные характеристики цилиндрического преобразователя с однозвенным ФНЧ ( $h_1 = 0,1$ ;  $l_1 = \infty$ ).  
 1 —  $m = 1,0$ ;  $Q = 0,28$ ; 2 —  $m = 0,6$   
 $Q = 0,7$ ; 3 —  $m = 0,4$ ;  $Q = 1,5$ ; 4 —  $m = 0,2$ ;  
 $Q = 5,5$  ( $z_1 = R_r + \omega L_1$ ,  $m = (\omega_n^2 L_1 C_n)^{-1/2}$ ;  $Q = \omega_n C_n R_r$ ).



лов несколько процентов (при нагрузке на воду). Для коррекции частотной характеристики таких сравнительно узкополосных систем используют либо ФНЧ, либо ФЛТ.

Однозвенный ФЛТ состоит из индуктивности и внутреннего сопротивления генератора, включенных параллельно преобразователю (см. рис. 5.1).

Численные расчеты корректирующих цепей для преобразователей типа стержней (пластин), поясняются рис. 6.1—6.2, на примере ПКП, нагруженного на воду, параметры корректирующих цепей сведены в табл. 6.2 ( $N = 1$ ,  $s = 0$ ) и табл. 6.3 ( $N = 2$ ,  $S = 0$ ) соответственно.

На рис. 6.3, 6.4 приведены аналогичные результаты для цилиндрического ПКП, нагруженного на воду, частотная характеристика которого скорректирована ФНЧ. Отметим, что эффек-

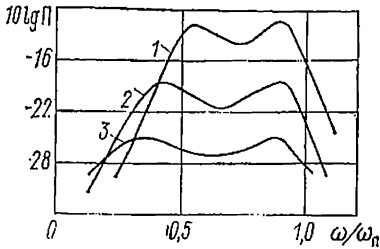


Рис. 6.4. Частотные характеристики цилиндрического преобразователя с двухзвенным ФНЧ ( $h_1 = 0,1$ ;  $l_1 = 0,5$ ).

$1 - m = 1,2$ ;  $Q = 0,7$ ;  $\alpha = 0,69$ ;  $2 - m = 0,9$ ;  $Q = 0,25$ ;  $\alpha = 0,31$ ;  $3 - m = 0,6$ ;  $Q = 0,57$ ;  $\alpha = 0,42$  ( $Y_1 = i\omega C_1$ ;  $z_1 = R_r + i\omega L_1$ ;  $z_2 = i\omega L_1$ ;  $m = (\omega_1^2 L_1 C_n)^{-1/2}$ ;  $Q = R_r \omega_n C_n$ ;  $\alpha = C_1 / C_n$ ).

тивность электрической коррекции растет с ростом КЭМС пьезоматериала.

### § 6.3. Согласующие акустические системы

**Согласующие слои с постоянными поперечными размерами.** Акустические системы в отличие от электрических корректирующих звеньев выполняют функции согласования активного элемента преобразователя с рабочей средой, так как при этом корректируется собственная широкополосность преобразователя, определенная на частотной зависимости активной составляющей проводимости. Акустическое согласование наиболее эффективно в окрестности основной резонансной частоты активного элемента.

Задача согласования решается путем помещения между активным элементом и рабочей средой согласующего звена, акустические и геометрические параметры которого варьируются на максимум полосы пропускания [3, 82].

Подробно исследован случай, когда согласующее звено выполнено в виде набора слоев, толщина и волновое сопротивление которых определяются из условия максимума полосы пропускания, а поперечный размер остается постоянным. Менее подробно исследован случай, когда варьируются на максимум полосы пропускания волновые сопротивления и толщины слоев, а также закон изменения их поперечных размеров с толщиной (согласующие звенья рупорного типа). Оба случая анализируются в рамках одномерных теорий методом входных импедансов. В качестве примера на рис. 6.5 приведены частотные характеристики слоистых стержневых преобразователей, нагруженных на воду, параметры которых определены из условия максимума полосы пропускания.

Рис. 6.6 поясняет потенциальные возможности акустического согласования при различных законах уменьшения волнового сопротивления согласующих слоев. На рисунке приведены частотные характеристики активной составляющей входной проводи-

мости преобразователя, содержащего активный элемент с волновым сопротивлением  $z_n$  и десять согласующих слоев. Волновая толщина каждого слоя равна половине волновой толщины

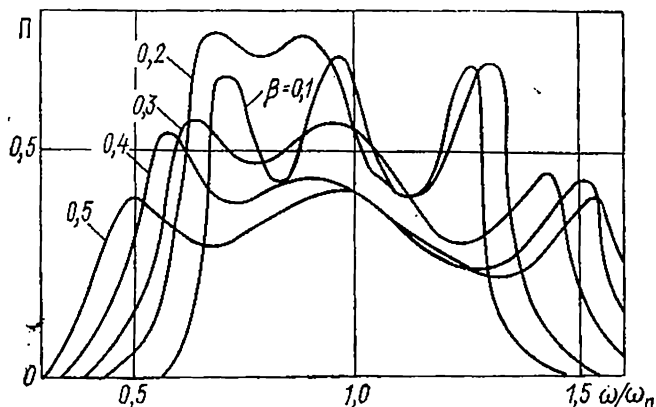


Рис. 6.5. Частотные характеристики пьезопреобразователя, нагруженного на воду, с одним согласующим слоем и двухпараметровым корректирующим звеном типа ФЛТ.

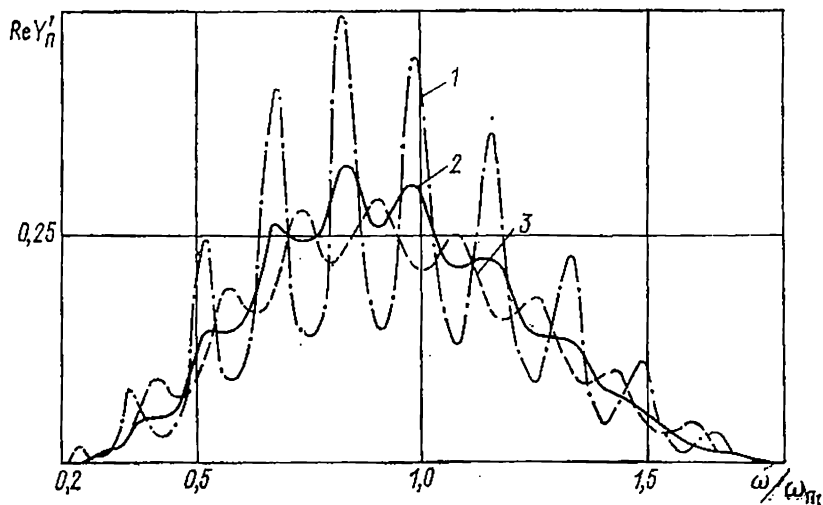
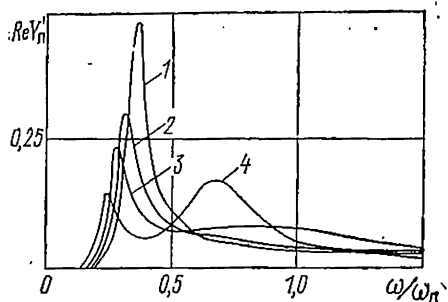
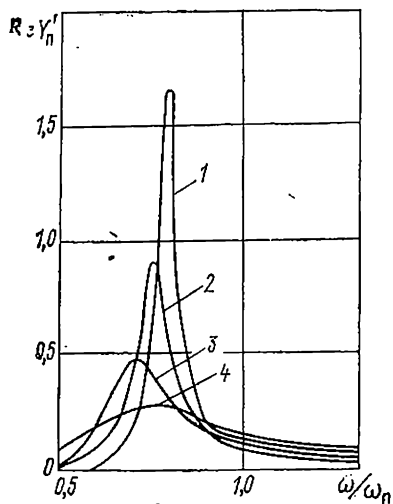


Рис. 6.6. Частотные характеристики стержневого преобразователя с десятью согласующими слоями.

активного элемента; волновые сопротивления слоев  $z_i$  меняются и по линейному закону ( $z_i = z_n - (z_n - z_a^+)i/n + 1$ ,  $n = 10$ , кривая 1), либо по закону среднего геометрического ( $z_i = \sqrt{z_{i-1}z_{i+1}}$ ,

кривая 2), либо по косинусоидальному закону ( $z_i = z_a^+ + [(z_n - z_a^+)/2](1 + \cos \pi i/n + 1)$ , кривая 3).

**Согласующие слои рупорного типа.** Для цилиндрического преобразователя целесообразно использовать тонкостенный пьезоактивный элемент ( $h_1 = 0,05 \div 0,1$ ), нагруженный на рабочую среду через согласующий слой переменной высоты, причем расчет согласующего звена выполняется в указанной ниже последовательности [41].



**Рис. 6.8.** Частотные характеристики цилиндрического пьезопреобразователя, нагруженного на воду через согласующий слой постоянной толщины.

1 —  $\Delta R_1 = 0$ ; 2 —  $\Delta R_1 = 0,2$ ; 3 —  $\Delta R_1 = 0,4$ ; 4 —  $\Delta R_1 = 0,7$ .

**Рис. 6.7.** Частотные характеристики цилиндрического пьезопреобразователя нагруженного на воду.

1 —  $l_1 = 0,1$ ; 2 —  $l_1 = 0,2$ ; 3 —  $l_1 = 0,5$ ; 4 —  $l_1 = \infty$ .

На первом этапе уточняется потенциальная широкополосность активного элемента с учетом конечной его высоты, при этом дифракцию учитывают формулами (5.53), (5.54). Результаты расчета поясняются рис. 6.7, на котором приводятся частотные характеристики нормированной активной составляющей проводимости  $\text{Re } Y_\pi' = \text{Re } Y/\omega_\pi C_\pi$  преобразователя нагруженного на воду, с относительной толщиной стенки  $h_1 = h/a_0 = 0,05$  для различных значений параметра  $l_1 = l_0/a_0$  ( $2l_0$  — высота активного элемента среднего радиуса  $a_0$ ).

На втором этапе рассчитываются частотные характеристики преобразователя с согласующим слоем постоянной толщины  $\Delta r_i = a_i - (a_0 + h)$  ( $a_i$  — внешний размер согласующего слоя). На рис. 6.8 приведены результаты численных расчетов для согласующего слоя из сферопластика ЭДС-7А с параметрами  $h_1 = 0,05$ ;  $l_1 = 0,5$  для различных значений относительной толщины согласующего слоя  $\Delta R_i = \Delta r_i/a_0$ .

На третьем этапе в расчетную схему вводится слой переменной высоты и варьируются его геометрические параметры: толщина и угол раскрыва слоя переменной высоты при выбранном

ранее материале слоя. Из рис. 6.9 видно, что для слоя переменной высоты и угла раскрыва  $45^\circ$  в оптимальном случае ( $\Delta R_1 = 0,3$ ) полоса пропускания составляет примерно декаду при малом ( $\approx 30\%$ ) увеличении радиального размера преобразователя.

#### § 6.4. Преобразователи с распределенным по длине возбуждением

Преобразователи типа стержней (пластин) имеют гармонический спектр, причем при возбуждении его однородным по длине активного элемента полем чувствительность преобразователя на четных гармониках активного элемента заведомо равна нулю, что ограничивает возможность расширения полосы пропускания.

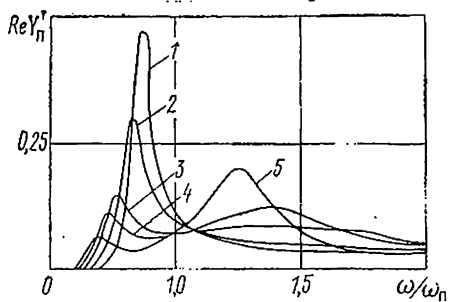


Рис. 6.9. Частотные характеристики цилиндрического пьезопреобразователя, нагруженного на воду через согласующий слой переменной высоты.  
1 —  $\Delta R_1 = 0$ ; 2 —  $\Delta R_1 = 0,1$ ; 3 —  $\Delta R_1 = 0,3$ ;  
4 —  $\Delta R_1 = 0,4$ ; 5 —  $\Delta R_1 = 0,6$ .

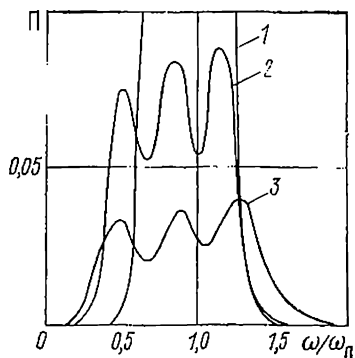


Рис. 6.10. Частотные характеристики секционированного пьезопреобразователя с неоднородным возбуждением, нагруженного на воду.

Ограничение устраняют, используя для построения широкополосных систем пьезоэлемент, неоднородно поляризованный по длине и возбуждаемый однородным электрическим полем, или однородно поляризованный элемент, возбуждаемый неоднородным по длине электрическим полем.

Преобразователь с неоднородным возбуждением реализуется в виде секционированного преобразователя с независимым возбуждением секций. Параметры амплитудного и фазового распределения ЭДС генераторов возбуждения подлежат оптимизации на максимум полосы пропускания. Расчетная схема секционированного преобразователя с независимым возбуждением приведена в [33], результаты расчета поясняются рис. 6.10.

Рассмотрим преобразователь, одним компонентом которого является пьезокерамика, а другим — материал с волновым со-

противлением равным волновому сопротивлению рабочей среды. Активная часть такого преобразователя состоит из набора тонких пьезопластин, каждая из которых подключена к своему генератору через корректирующее звено (рис. 6.11). Варьируемыми являются параметры электрических корректирующих цепей, параметры амплитудно-фазового распределения ЭДС генераторов возбуждения и межэлементные расстояния в наборе пьезопластин. Конструктивно тыльный торец преобразователя

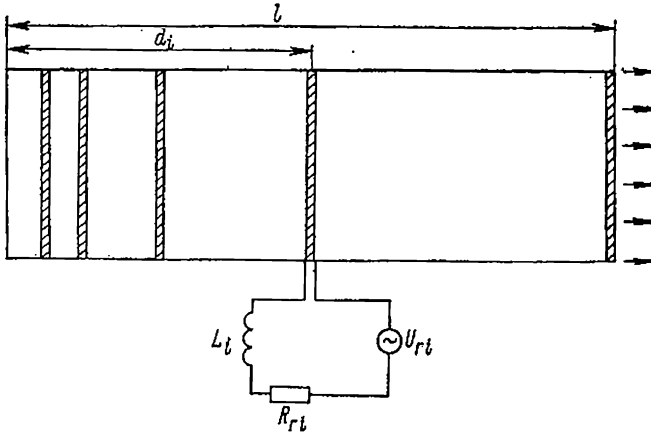


Рис. 6.11. Пьезопреобразователь рефлекторного типа.

либо свободен, либо зажат. Физические аспекты построения широкополосного преобразователя (по существу рефлекторного) заключаются в следующем.

Каждая тонкая пьезопластина, отстоящая от абсолютно отражающего тыльного торца на расстояние  $d_i$ , создает в рабочей среде поле интерферирующих между собой волн с частотной зависимостью типа  $p_i^{(C)} \sim \cos kd_i$  (отражающий торец зажат — преобразователь С-типа), либо  $p_i^{(S)} \sim \sin kd_i$  (отражающий торец свободен — преобразователь S-типа).

Варьируя набором  $d_i$ , можно изменять число и положение интерференционных максимумов на частотной характеристике преобразователя.

Корректирующим звеном, расположенным между генератором с ЭДС  $U_{r,i}$  и  $i$ -пластиной, может служить последовательно включенное внутреннее сопротивление  $R_{r,i}$  и индуктивность  $L_i$ , образующие с емкостью пластины  $C_{pi}$  фильтр низких частот с частотой среза  $\omega_c = (L_i C_{pi})^{-1/2}$  и добротностью  $(R_{r,i} \omega_i C_{pi})^{-1}$ .

Варьируя набором  $\omega_i$ ,  $Q_i$ , можно эффективно «выключать» каждую  $i$ -ю пьезопластину на частотах  $\omega > \omega_i$ .

Основные характеристики рефлекторного преобразователя можно получить, если в суммарном поле пренебречь реверберационной составляющей, образованной волнами, многократно от-

раженными от тонких пластин (считаем тонкую пьезопластину акустически прозрачной).

В качестве расчетной рассмотрим схему преобразователя, приведенного на рис. 6.11, в котором идентичные пьезопластины отстоят от отражающего тыльного торца на расстояния  $L/a_i$

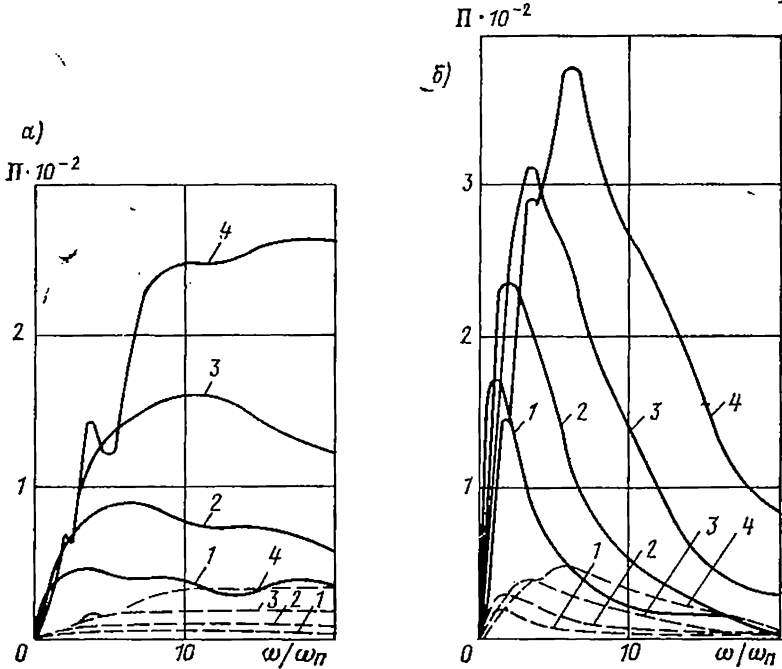


Рис. 6.12. Частотные характеристики рефлекторных преобразователей 1 —  $Q_n = 2^{-n+2}$ ; 2 —  $Q_n = 2^{-n+3}$ ; 3 —  $Q_n = 2^{-n+4}$ ; 4 —  $Q_n = 2^{-n+5}$  s-типа (а) и с-типа (б) при нагрузке на воду (---) и бетон (—).

$a_i = 2^{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  ( $L$  — длина преобразователя) и включены в цепь генератора с ЭДС  $U_{r_i}$  каждая и внутренним сопротивлением  $R_{r_i}$ . Тогда коэффициент передачи по мощности имеет вид

$$\Pi = \frac{8 \left| \sum p_t \bar{U}_{r_i} e^{i\phi_i} \right|^2 \operatorname{Re} Y'_n}{\sum \bar{U}_{r_i}^2 a_i Q_i},$$

где  $\bar{U}_{r_i} = U_{r_i}/U_{r1}$ ,  $\bar{\phi}_i = \phi_i - \phi_1$ ;  $t = \omega/\omega_0$ ;  $N = \omega_n/\omega_0$ ;

$$Y'_n = \frac{it(1 - v^2 e^{-i2y})}{1 - v^2 e^{-i2y} - \frac{\beta}{iy}(1 - e^{-iy})(1 + v)(1 - ve^{-iy})};$$



$v = (1 - \alpha_a^+) / (1 + \alpha_a^+)$ ;  $\omega_n$ ,  $\omega_0$  — резонансные частоты пьезопластины и преобразователя соответственно;  $p_i = A_i \sin \pi t / a_i$  — для преобразователя S-типа;  $p_i = A \cos \pi t / a_i$  — для преобразователя C-типа;

$$A_i = \left[ 1 + Y'_n \left( \frac{2}{a_i Q_i} + it \frac{4}{a_i^2 m_i^2} \right) \right]^{-1};$$

$$m_i = \omega_{s,i} / \omega_i; \quad \omega_{s,i} = (l_i C_{n,i})^{-1/2}; \quad \omega_i = \omega_0 a_i / 2.$$

На рис. 6.12 приведены частотные характеристики преобразователей S- и C-типов при нагрузке на воду или бетон и следующих значениях исходных параметров:  $U_{r,i} = \text{const}$ ;  $N = 100$ ;  $n = 8$ ;  $m_i = 1,0$ ;  $Q_i = \text{var}$ ;  $R_{r,i} = 3\omega_0 C_n = \text{const}$ .

В рассмотренном случае суммарная толщина пьезопластин составляет примерно десятую часть длины преобразователя, что объясняет низкое значение коэффициента передачи. Этот недостаток компенсируется увеличением числа преобразователей, работающих на общую нагрузку. Полоса пропускания может составлять 4—5 октав при сравнительно небольшом числе варьируемых параметров.

### § 6.5. Комплексование методов и задача многопараметровой оптимизации

Задача разработки широкополосного преобразователя решается при наличии ряда ограничений, которые необходимо учитывать при рассмотрении возможностей метода расширения полосы пропускания. Целесообразной является разработка специализированных программ для анализа в комплексе разработки широкополосных преобразователей типа стержней, пластин, цилиндров. На стадии численного анализа задача сводится к оптимизации параметров некоторой сложной системы, функцией качества которой служит полоса пропускания [88].

Для проведения сравнительных оценок различных методов нужно вычислять не только полосу пропускания той или иной структуры, но и величины, характеризующие эффективность ее работы. В качестве таковых целесообразно, как уже указывалось, ввести коэффициенты  $K_0$ ,  $K_{ш}$  или  $\Pi$ ,  $\omega$ .

Результаты расчета параметров широкополосных преобразователей приведены в [49, 52] и сведены в табл. 6.1—6.4.

Анализ данных табл. 6.1—6.4 показывает, что для различных способов расширения полосы пропускания  $K_0 \ll 1$ , причем наиболее выгодны акустические методы расширения полосы. В то же время при широкополосном возбуждении уменьшение чувствительности широкополосного преобразователя компенсируется ростом его полосы пропускания.

Таблица 6.1 Оптимальные параметры широкополосных пьезопреобразователей (нагрузка на воду)

Параметры	$N=1, S=0$				
	$\beta=0,1$	$\beta=0,2$	$\beta=0,3$	$\beta=0,4$	$\rho=0,5$
$\Pi_{\max}$	0,60	0,47	0,39	0,36	0,33
$K_0 \cdot 10^{-2}$	1,14	0,62	0,45	0,33	0,26
$K_{\text{ш}}$	0,87	0,82	0,80	0,78	0,76
$(\Delta f/f), \%$	37	54,2	69,5	83,9	98,6
$m$	5,07	3,42	2,59	2,14	1,96
$Q$	0,95	0,90	0,84	0,78	0,72

Примечание.  $N$  — число двухпараметровых корректирующих звеньев в ФЛТ;  $S$  — число согласующих слоев.

Таблица 6.2 Оптимальные параметры широкополосных пьезопреобразователей

Параметры	$N=2, S=0$					$N=1, S=1$				
	$\beta=0,1$	$\beta=0,2$	$\beta=0,3$	$\beta=0,4$	$\beta=0,5$	$\beta=0,1$	$\beta=0,2$	$\beta=0,3$	$\beta=0,4$	$\beta=0,5$
$\Pi_{\max}$	0,48	0,38	0,31	0,28	0,25	0,70	0,75	0,56	0,42	0,41
$K_0 \cdot 10^{-2}$	0,61	0,31	0,24	0,15	0,11	2,74	1,30	0,70	0,48	0,37
$K_{\text{ш}}$	0,35	0,34	0,31	0,32	0,35	2,14	2,42	1,93	1,51	1,46
$(\Delta f/f), \%$	48,5	70,3	87,3	106,9	124,1	62,2	76,6	90,9	105,2	117,3
$Q$	2,80	1,90	1,80	1,50	1,29	4,98	2,48	1,95	1,50	1,55
$m_1$	0,90	1,84	0,78	0,69	0,60	0,95	0,82	0,83	0,78	0,74
$\alpha_{\pm 2}$	0,15	0,35	0,50	0,90	1,70					
$m_2$	0,92	0,84	0,86	0,76	0,64					
$b_2$						0,50	0,45	0,36	0,33	0,31
$\alpha_2$						0,36	0,36	0,36	0,40	0,40

Таблица 6.3 Оптимальные параметры широкополосных пьезопреобразователей

Параметры	$N=3, S=0$			$N=2, S=1$			$N=1, S=2$		
	$\beta=0,1$	$\beta=0,2$	$\beta=0,3$	$\beta=0,1$	$\beta=0,2$	$\beta=0,3$	$\beta=0,1$	$\beta=0,2$	$\beta=0,3$
$\Pi_{\max}$	0,02	0,35	0,29	0,92	0,41	0,75	0,17	0,32	0,41
$K_0 \cdot 10^{-2}$	0,03	0,30	0,19	1,49	0,53	0,46	0,15	0,15	0,15
$K_{\text{ш}}$	0,02	0,41	0,32	0,71	0,97	0,83	0,45	0,88	1,22
$\Delta f/f, \%$	65,9	74,2	93,0	67,4	83,9	94,9	104,6	110,0	114,4
$Q$	7,38	2,31	2,10	1,66	2,67	1,84	9,45	7,42	8,70
$m_1$	0,31	0,86	0,78	0,83	0,89	0,73	0,43	0,42	0,45
$\alpha_{\pm 2}$	0,30	0,27	0,40	0,27	0,75	0,55			
$m_2$	0,37	0,85	0,79	0,88	0,95	0,76			
$\alpha_{\pm 3}$	0,60	0,58	0,63						
$m_3$	0,38	0,86	0,83						
$b_2$				0,53	0,93	0,63	0,61	0,65	0,61
$\alpha_{\pm 2}$				0,30	0,40	0,48	0,34	0,36	0,37
$b_3$							0,63	0,62	0,63
$\alpha_{\pm 3}$							0,11	0,12	0,13

Таблица 6.4 Оптимальные параметры широкополосных пьезопреобразователей

Параметры	$N=4, S=0$	$N=3, S=1$	$N=2, S=2$	$N=1, S=3$
	$\beta=0,2$	$\beta=0,2$	$\beta=0,2$	$\beta=0,2$
$\Pi_{\max}$	0,03	0,90	0,30	0,16
$K_3 \cdot 10^{-2}$	0,01	0,68	0,15	0,06
$K_{\text{ш}}$	0,02	0,82	0,78	0,50
$\Delta f/f, \%$	81,9	85,2	108,9	126,3
$Q$	6,36	1,88	7,96	12,6
$m_1$	0,23	0,82	0,44	0,34
$\alpha_{\text{э}2}$	0,76	0,33	0,68	
$m_2$	0,24	0,88	0,46	
$\alpha_{\text{э}3}$	0,61	0,69		
$m_3$	0,30	0,86		
$\alpha_{\text{э}4}$	1,21			
$m_4$	0,05			
$b_2$		0,52	0,64	0,64
$\alpha_2$		0,39	0,28	0,48
$b_3$			0,66	0,63
$\alpha_3$			0,11	0,18
$b_4$				0,51
$\alpha_4$				0,09

**МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ  
ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ С УПРАВЛЯЕМЫМИ  
ПАРАМЕТРАМИ И ХАРАКТЕРИСТИКАМИ****§ 7.1. Многорезонансный преобразователь, работающий на множестве четных и нечетных гармоник**

Широкополосные преобразователи, обладая универсальностью, значительно проигрывают резонансным преобразователям по своей чувствительности.

Особый интерес представляют преобразователи, режимом работы которых можно эффективно управлять с электрической стороны, используя их либо в резонансном режиме с высокой эффективностью на достаточно плотном множестве частот, либо в широкополосном режиме с пониженной чувствительностью, но с большими функциональными возможностями.

Полный набор собственных частот преобразователя с симметричным (нечетные гармоники) либо антисимметричным (четные гармоники) распределением смещений, определяется его размерами и физическими свойствами пьезоматериала, параметрами электрической и акустической нагрузки; тип колебаний — симметричный либо антисимметричный — определяется способом возбуждения. Изменяя способ возбуждения, можно изменить набор рабочих частот преобразователя.

Рассмотрим режимы возбуждения преобразователя, содержащего  $2^n$  секций [33], изображенного на рис. 7.1. При синфазном возбуждении всех секций резонансные частоты преобразователя образуют ряд  $\omega_p/\omega_n = 1, 3, \dots (2p - 1)$ . Такой способ возбуждения является наиболее употребимым.

Если фаза возбуждающего напряжения меняется через  $2^{n-1}$  секций (дипольное включение), то резонансные частоты преобразователя образуют ряд  $\omega_p/\omega_n = 2(2p - 1)$ , причем основной резонансной частотой при дипольном включении будет вторая гармоника преобразователя.

Если фаза возбуждающего напряжения меняется через  $2^{n-2}$  секций (квадрупольное возбуждение), то резонансные частоты образуют ряд  $\omega_p/\omega_n = 4(2p - 1)$ , причем основной резонансной частотой при таком возбуждении будет четвертая гармоника преобразователя.

Наконец, если фаза возбуждающего напряжения меняется через секцию, резонансные частоты образуют ряд  $\omega_p/\omega_n = 2^n(2p - 1)$ .

Основные частоты такого преобразователя при различных режимах включения образуют октавный ряд  $\omega_p/\omega_n = 1, 2, \dots, 2^m, \dots, 2^n$ , а в совокупности резонансные частоты преобразователя образуют множество частот  $\omega_{mp}/\omega_n = 2^{n-m}(2p-1)$ ;  $m \leq n$ ;  $p = 1, 2, \dots$ .

Если чувствительность преобразователя в режиме излучения при синфазном возбуждении принять за единицу, то при дипольном возбуждении она возрастет в два раза (так же, как

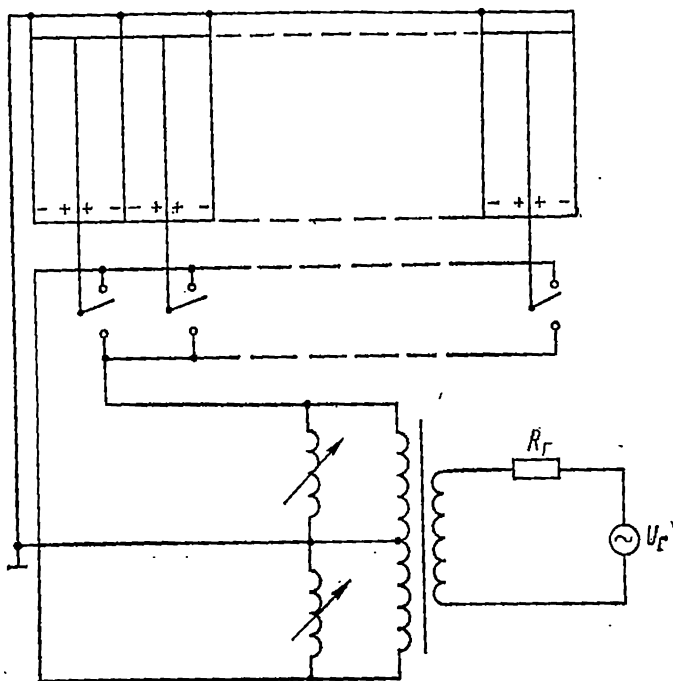


Рис. 7.1. Схема возбуждения пьезопреобразователя, содержащего  $2^n$  секций.

и основная резонансная частота), при квадрупольном — в четыре (так же, как и основная резонансная частота) и т. д.

Для практической реализации всех рассмотренных способов возбуждения необходимо, чтобы источник возбуждения имел симметричный выход со средней точкой, каждая секция преобразователя была склеена из двух идентичных пьезопластин встречной поляризации, а электроды подключены к источнику напряжения так, как показано на рис. 7.1.

## § 7.2. Многорезонансный преобразователь, работающий на произвольной совокупности резонансных частот

Характерной особенностью пьезопреобразователя является зависимость собственных частот не только от его размеров и физических параметров, но и от параметров электрической на-

грузки (при фиксированной акустической нагрузке). Если электрическая нагрузка преобразователя реактивна, то за счет электро-механической связи она трансформируется в реактивную составляющую механического сопротивления преобразователя и таким образом влияет на условия возникновения резонанса в механической колебательной системе. Так, например, если электрическая нагрузка образует с входной емкостью пьезоэлемента резонансный контур, то в спектре собственных частот преобразователя появится дополнительный резонанс. В общем случае число дополнительных (внесенных) резонансов определяется числом резонансов электрической нагрузки с внесенной емкостью преобразователя.

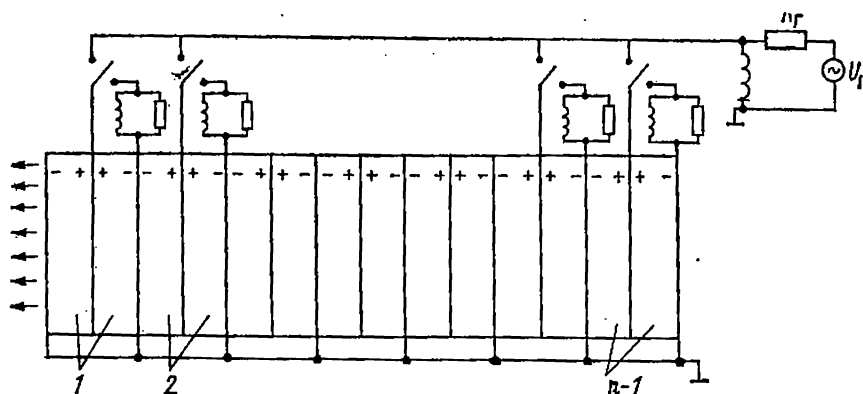


Рис. 7.2. Структурная схема многорезонансного пьезопреобразователя.

Положение внесенных резонансов на шкале частот определяется параметрами электрической нагрузки, входной проводимостью преобразователя и степенью близости к собственным частотам преобразователя, определенным в режимах холостого хода (х.х), либо короткого замыкания (к.з). Если внесенные резонансы и собственные резонансы (в режимах х.х и к.з) близки, то их идентификация теряет смысл из-за сильного влияния друг на друга; в совокупности они образуют спектр собственных частот нагруженного электрического преобразователя.

Указанная особенность собственных частот нагруженного пьезопреобразователя как единой электроакустической колебательной системы является физической основой создания преобразователей с произвольным множеством резонансных частот, положением которых можно управлять с электрической стороны.

Конструктивно такой пьезопреобразователь состоит из ряда секций, одна часть которых включена в цепь источника возбуждения, а другая — нагружена с электрической стороны на пассивные цепи с управляемыми параметрами (резисторы, индуктивности), как это показано на рис. 7.2. Для расчета преобразо-

вателя, содержащего пьезоактивные управляемые слои, необходимо использовать формулу (5.19) для входного импеданса пьезоактивного слоя с произвольной электрической нагрузкой и методику приведения импеданса слоистой системы к рабочим граням преобразователя.

В качестве примера рассмотрим пьезопреобразователь, состоящий из активного элемента 1 и набора пьезоактивных слоев 2, 3, ...,  $n = 1$ , расположенных с его тыльной стороны, как это показано на рис. 7.2.

Фронтальной стороной преобразователь нагружен на рабочую среду с волновым сопротивлением  $z_m$ , а тыльной стороной — на среду с волновым сопротивлением  $z_n$ . Активный пьезоэлемент подключен к генератору с ЭДС  $U_r$  и внутренним сопротивлением  $R_r$  через параллельную индуктивность  $L_1$ , а каждый пьезоактивный слой — к активно-индуктивной нагрузке  $R_p, L_p$ . Слои и активный элемент предполагаются идентичными по своим физическим характеристикам.

Для численных оценок работы пьезообразователя в режиме излучения запишем выражение для коэффициента передачи по мощности [44, 51]

$$\Pi = \frac{\beta m_1}{\pi Q_1} (1 - v_{1m}^2) \left| \frac{(1 - a_1)(1 - a_1 \bar{v}_{12})}{(\Delta_0 - \Delta_1)(Y_n + Y_{s1})} \right|^2, \quad (7.1)$$

$$v_{1m} = \frac{z_1 - z_m}{z_1 + z_m}; \quad \bar{v}_{1p} = \frac{z_1 - \bar{z}_p}{z_1 + \bar{z}_p};$$

$$\bar{z}_p = z_p \frac{1 - a_p^2 \bar{v}_{p, p+1} - \gamma_p (1 - a_p) [3 + \bar{v}_{p, p+1} - a_p (1 + 3\bar{v}_{p, p+1})]}{1 + a_p^2 \bar{v}_{p, p+1} - \gamma_p (1 - a_p^2) (1 + \bar{v}_{p, p+1})};$$

$$\gamma_p = \frac{\beta}{2\pi i \omega b_p} \frac{Y'_{sp}}{Y_{sp} + i\omega_p b_p}; \quad a_p = e^{-i\pi b_p \bar{\omega}}; \quad b_p = l_p/l; \quad \bar{\omega}_p = \omega_p/\omega_{n1}$$

$$Y'_{sp} = \frac{m_p}{Q_p} - i \frac{m_p^2}{\bar{\omega} b_p}; \quad Q_p = \omega_p m_p R_p C_p; \quad m_p^2 = (L_p C_p \omega_p^2)^{-1};$$

$$Y'_n = i\bar{\omega} \frac{\Delta_0}{\Delta_0 - \Delta_1}; \quad \Delta_0 = 1 - v_{1m} \bar{v}_{12} a_1^2;$$

$$\Delta_1 = \frac{\beta}{2\pi i \omega} (1 - a_1) [2 + \bar{v}_{12} + v_{1m} - a_1 (\bar{v}_{12} + v_{1m} + 2\bar{v}_{12} v_{1m})],$$

где  $l_p, z_p, \omega_p, C_p$  — толщина, волновое сопротивление, частота антирезонанса, емкость зажато  $p$ -го активного слоя ( $p = 1$  соответствует активному элементу);  $\beta$  — квадрат коэффициента электромеханической связи.

Случай, когда преобразователь содержит один слой с управляемыми параметрами, будет рассмотрен в следующем разделе. Случай, когда преобразователь содержит два слоя с управляемыми параметрами, поясняется рис. 7.3, где изображены зависимость максимума коэффициента передачи  $\Pi_{\max}$  и частоты максимума  $\omega_p = \omega_p/\omega_{n1}$  от параметра настройки  $m_3$ . В расчетах

принято  $b_2 = b_3 = 0,25$ ;  $Q_2 = Q_3 = 100$ ;  $Q_1 = 0,3$ ;  $m_1 = 0,9$ ;  $m_2 = 0,225$ ;  $\beta = 0,2$ ;  $\alpha_a^+ = 0,06$  (нагрузка преобразователя на воду).

Характерные особенности формирования требуемого набора собственных частот в основном частотном интервале  $\bar{\omega} \in (0,2)$  заключаются в следующем. В режиме хх, когда все электрические нагрузки отсутствуют, преобразователь имеет две собственные частоты в интервале  $\bar{\omega} \in (0,2)$ :  $\bar{\omega} = 2/3$ ;  $\bar{\omega} = 4/3$ .

При увеличении электрической нагрузки на управляемые слои увеличиваются параметры  $m_2$ ,  $m_3$ , соответственно увеличиваются внесенные резонансные частоты (им соответствуют штри-

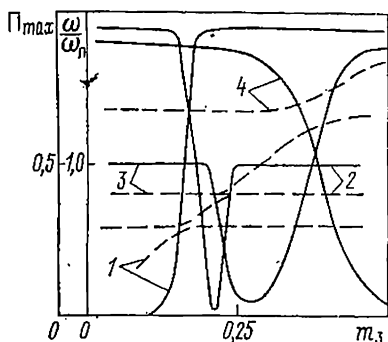


Рис. 7.3. Регулировочные характеристики пьезопреобразователя с двумя управляемыми слоями ( $b_2 = b_3 = 0,25$ ).

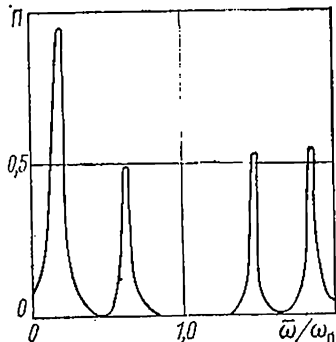


Рис. 7.4. Частотные характеристики пьезопреобразователя с двумя управляемыми слоями ( $b_2 = b_3 = 0,25$ ).

ховые линии на рис. 7.3, нумерация кривых соответствует нумерации резонансов). При сближении внесенных резонансов и собственных резонансов преобразователя (в режиме хх) происходит их трансформация с образованием пар связанных резонансов. Коэффициенты передачи  $\Pi_{max}$ , соответствующие различным резонансам, сильно изменяются в зоне трансформации и сохраняют примерно постоянное значение, если параметр перестройки не влияет на величину соответствующего резонанса. Вид частотной характеристики преобразователя для случая  $m_3 = 0,375$  (остальные параметры те же) представлен на рис. 7.4.

Если увеличивать число слоев, сохраняя их суммарную толщину, то число внесенных резонансов возрастет, но преобразователь будет работать на этих частотах достаточно эффективно только в том случае, если они группируются в окрестности частот  $\bar{\omega} = 2/3$ ,  $\bar{\omega} = 4/3$ , т. е. рабочий диапазон при этом существенно не изменится.

Рассмотрим теперь преобразователь состоящий из активного элемента и двух слоев с толщинами  $b_2 = b_3 = 0,5$ . Подбирая параметры  $m_2$ ,  $m_3$  оптимальным образом, можно расположить в основном частотном интервале пять резонансных частот (из



них две внесенные), на которых преобразователь работает достаточно эффективно ( $\Pi_{\max} \geq 0,5$ ). На рис. 7.5 представлена частотная характеристика такого преобразователя с параметрами  $m_1 = 0,9$ ;  $Q_1 = 0,3$ ;  $m_2 = 0,3$ ;  $m_3 = 0,5$ ;  $Q_2 = Q_3 = 100$ .

При увеличении числа слоев без увеличения их суммарной толщины растет число внесенных резонансов, однако работа

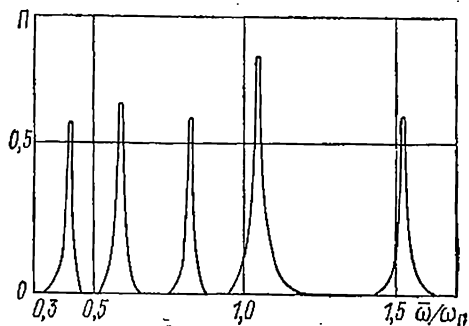


Рис. 7.5. Частотные характеристики пьезопреобразователя с двумя управляемыми слоями ( $b_2 = b_3 = 0,5$ ).

преобразователя на этих частотах (в режиме х.х) будет достаточно эффективной, если они группируются вблизи собственных частот преобразователя:  $\bar{\omega} = 0,5$ ;  $1,0$ ;  $1,5$ .

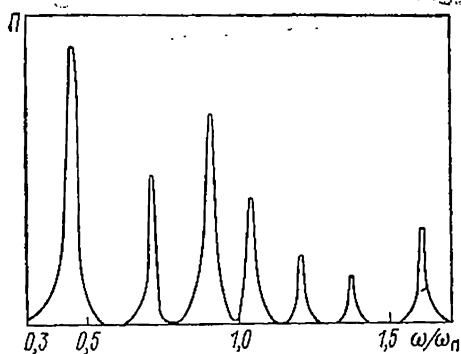


Рис. 7.6. Частотные характеристики пьезопреобразователя с четырьмя управляемыми слоями ( $b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 0,25$ ).

На рис. 7.6 показана частотная характеристика преобразователя с четырьмя слоями ( $b_i = 0,25$ ;  $i = 2 \div 5$ ) при следующих значениях параметров:  $m_1 = 0,4$ ;  $Q_1 = 0,3$ ;  $m_2 = 0,3$ ;  $m_3 = 0,2$ ;  $m_4 = 0,3$ ;  $m_5 = 0,4$ ;  $Q_i = 100$ ;  $i = 2 \div 5$ . На этой характеристике четыре резонанса являются внесенными, а три собственными. Аналогичным образом могут быть построены многорезонансные преобразователи на основе цилиндрических пьезоэлементов с управляемыми слоями. Конструктивно такой пьезопреобразователь представляет собой систему склеенных между собой пьезоцилиндров, один из которых включен в цепь источника возбуждения, а другие, нагруженные с электрической стороны пассивными нагрузками, используются в качестве управляемых слоев [42].

### § 7.3. Преобразователь с перестраиваемой рабочей частотой

Для излучения тонального (узкополосного) сигнала в некоторой полосе частот наиболее целесообразен резонансный преобразователь с перестраиваемой рабочей частотой. Для такого преобразователя уменьшение чувствительности в сравнении с резонансным перестраиваемым минимально, а сам он будет обладать большей чувствительностью в сравнении с широкополосным с той же полосой пропускания.

Практически подобный преобразователь может быть построен на основе пьезоактивных управляемых слоев, причем для перестройки рабочей частоты в октавном диапазоне достаточно одного слоя, толщина которого вдвое меньше толщины активного элемента [50]. Принцип построения и расчетная схема такого преобразователя полностью аналогичны ранее рассмотренным, поэтому приведем только основные его характеристики.

На рис. 7.7 представлены зависимости нормированных резонансных частот  $\bar{\omega}_p$  и максимума нормированной активной проводимости преобразователя  $\text{Re } Y'_n = \text{Re } Y_n / \omega_n C_n$  от параметра настройки  $m_2$  (нумерация кривых соответствует нумерации резонансов).

В предельном случае режима х.х. преобразователь имеет в основном частотном интервале  $\bar{\omega} \in (0,2)$  две резонансные частоты  $\bar{\omega} = 2/3; 4/3$ ; при увеличении параметра настройки  $m_2$  в спектре собственных частот появляется еще один резонанс (внесенный), величина которого будет увеличиваться от нуля до предельного значения  $\bar{\omega} = 2/3$ . При достаточном сближении частот внесенного резонанса и первой собственной частоты преобразователя в режиме х.х. последняя начинает перестраиваться и увеличивается до предельного значения  $\bar{\omega} = 4/3$ .

Таким образом, вторая резонансная частота нагруженного преобразователя с управляемым слоем перестраивается в октавном диапазоне  $\omega = 2/3 \div 4/3$ . Зависимость активной проводимости при такой перестройке (изображенная на рис. 7.7 штриховыми линиями) такова, что излучаемая преобразователем мощность на перестраиваемой частоте изменяется не более чем вдвое.

На рис. 7.8 представлена зависимость максимума коэффициента передачи по мощности  $\Pi_{\text{max}}$  для трех резонансных частот (1—3) от параметра настройки  $m_2$  (сплошные линии для частного случая  $m_1 = 0,5; Q_1 = 0,3$ , чему соответствует минимальная неравномерность частотной характеристики. При других значениях относительной толщины слоя  $b_2$  неравномерность частотной характеристики  $\Pi_{\text{max}}$  в диапазоне перестройки выше, хотя сам принцип управления частотой сохраняется).

Если управляемый слой расположен между рабочим пьезоэлементом и рабочей средой и имеет электрическую нагрузку аналогичного вида, то перестройкой индуктивности также можно эффективно управлять рабочими частотами преобразователя.

При изменении индуктивности будет меняться вносимое механическое сопротивление и механический импеданс слоя, а следовательно, и результат трансформации акустического сопротивления рабочей среды на излучающую грань пьезоэлемента. В результате существенно изменяется (по сравнению с рассмотрен-

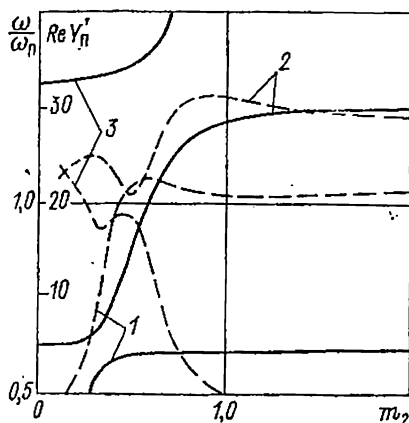


Рис. 7.7. Регулировочные характеристики пьезопреобразователя с перестраиваемой рабочей частотой.

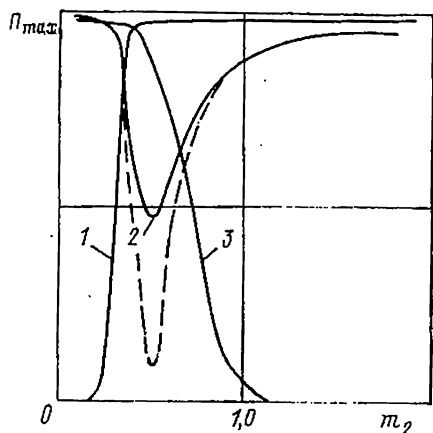


Рис. 7.8. Регулировочные характеристики пьезопреобразователя с перестраиваемой рабочей частотой.

ным случаем) входная электрическая проводимость преобразователя и излучаемая мощность в диапазоне перестройки рабочей частоты (штриховая линия на рис. 7.8 для второго резонанса).

#### § 7.4. Преобразователь с перестраиваемой рабочей полосой частот

Простой преобразователь с однородным возбуждением может работать в широкополосном режиме в окрестности любой нечетной гармоники, причем в каждой такой окрестности формируется полоса одинаковой абсолютной величины. Ясно, что эти полосы пропускания не пересекаются (не соприкасаются), так как в окрестности четных гармоник нельзя сформировать рабочей полосы частот.

Смысл построения перестраиваемого широкополосного преобразователя заключается в том, чтобы обеспечить возможность перекрытия широкого диапазона частот путем формирования соприкасающихся (пересекающихся) рабочих полос пропускания умеренной ширины с умеренными потерями чувствительности. Такой преобразователь можно построить на основе секционированного преобразователя, рассмотренного в § 7.2, отдельные секции (группы секций) которого возбуждаются либо синфазно, либо дипольно, либо другим аналогичным образом с чередованием фазы возбуждающего напряжения.

В общем случае будем рассматривать преобразователь, содержащий  $2^n$  секций ( $n = 0, 1, 2 \dots$ ), основные резонансные частоты которого в различных режимах включения образуют октавный ряд [33]  $\omega_p/\omega_1 = 2^m$ ;  $m = 0, 1, \dots n$ .

При каждом способе включения можно подобрать параметры электрической схемы на максимум полосы пропускания, тогда при синфазном возбуждении будет сформирована полоса в окрестности основной резонансной частоты  $\omega_1$ , при дипольном возбуждении — в окрестности резонансной частоты  $2\omega_1$ , причем в широкополосных режимах, сформированных в окрестности каждой из частот октавного ряда, сохраняется относительная полоса пропускания, т. е. появляется возможность сформировать

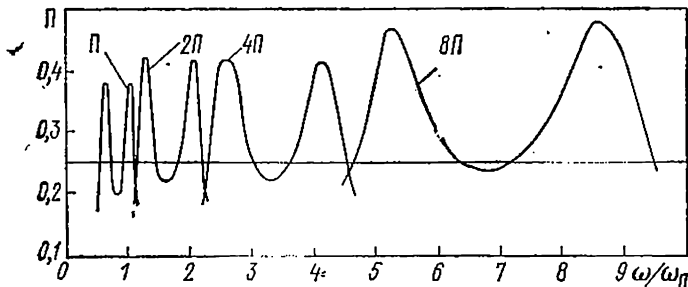


Рис. 7.9. Частотные характеристики пьезопреобразователя с перестраиваемой рабочей полосой частот (нагрузка на воду).

соприкасающиеся рабочие полосы частот и перекрыть путем переключения режимов более широкий рабочий диапазон.

На рис. 7.9 приведены частотные характеристики преобразователя из восьми секций ( $n = 3$ ), нагруженного на воду, для четырех режимов его возбуждения.

В каждом режиме возбуждения формируется полоса пропускания порядка октавы, а путем переключения режимов перекрывается рабочая полоса частот в четыре октавы. В общем случае с помощью преобразователя, содержащего  $2^n$  секций, можно перекрыть полосу частот в  $n + 1$  октаву.

Таким образом, формирование режимов работы секционированного преобразователя с соприкасающимися рабочими полосами пропускания является эффективным способом перекрытия широкого частотного диапазона при сохранении достаточной чувствительности.

## § 7.5. Многофункциональные перестраиваемые преобразователи

Рассмотренные выше принципы построения широкополосных, многорезонансных и перестраиваемых преобразователей таковы, что их можно объединить в рамках одной конструкции. Полученный таким путем преобразователь будет многофункциональ-

ным по своим возможностям и сможет работать в любом из перечисленных режимов.

Приведем некоторые примеры построения многофункциональных преобразователей.

Рассмотрим секционированный преобразователь, каждая секция которого состоит из двух склеенных между собой идентичных пластин встречной поляризации, наружные электроды которых объединены между собой. Работа преобразователя, состоящего, например, из восьми таких секций, может быть организована следующим образом.

При синфазном возбуждении всех секций от одного источника возбуждения (все внутренние электроды объединены) преобразователь может работать на основной резонансной частоте  $\omega_p$  и ее нечетных гармониках либо как резонансный, либо как широкополосный с полосой пропускания  $\Delta\omega = (0,55 \div 0,65)\omega_p$ , одинаковой на всех нечетных гармониках (предполагается нагрузка на воду, квадрат КЭМС  $\beta = 0,2 \div 0,3$ ). Для обеспечения любого из указанных режимов достаточно иметь параллельную индуктивность и согласующий трансформатор, трансформирующий сопротивление генератора  $R_g$  до необходимого значения (двухпараметровая электрическая цепь с параметрами  $m$ ,  $Q$ , определенными ранее).

Если возбуждать преобразователь от генератора с симметричным выходом, то можно организовать его работу на частотах, образующих октавный ряд, а подбором параметров  $m$ ,  $Q$  двухпараметровой электрической цепи, включенной в каждое плечо симметричного выходного трансформатора, обеспечить либо резонансный режим его работы, либо широкополосный.

При дипольном включении на второй собственной частоте и нечетных ее гармониках можно сформировать полосы пропускания, абсолютная ширина которых вдвое больше, чем при синфазном включении. При квадрупольном включении секций на четвертой собственной частоте и нечетных ее гармониках можно сформировать полосы пропускания, абсолютная ширина которых вчетверо больше, чем при синфазном включении и т. д.

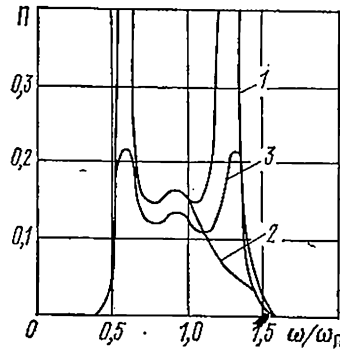
Если возбуждать преобразователь от системы генераторов с произвольным амплитудным распределением, то можно увеличивать полосу пропускания путем увеличения числа независимых генераторов и соответственно секций преобразователя, причем каждая секция подключается к соответствующему генератору с помощью двухпараметровой цепи с параметрами  $m$ ,  $Q$ . Как показано в гл. 6, полоса пропускания четырехсекционного преобразователя составляет в оптимальном варианте более двух октав. Таким образом, рассмотренный секционированный преобразователь обладает достаточно широкими функциональными возможностями при сравнительно простом обеспечении.

Рассмотрим наиболее важные режимы работы преобразователя, содержащего шесть секций. В таком преобразователе могут быть организованы синфазное и дипольное возбуждение и

соответственно резонансный либо широкополосный режимы работы на основной частоте и ее нечетных гармониках и на второй резонансной частоте и ее нечетных гармониках с сохранением отмеченных ранее количественных оценок полос пропускания для различных режимов включения.

Пусть теперь две пьезоэластины, расположенные с фронтальной стороны преобразователя, нагружены каждая на пассивную электрическую цепь, содержащую параллельно подключенные индуктивность и резистор, а остальные четыре подключены к общему источнику возбуждения через двухпараметровую электрическую цепь с параметрами  $m$ ,  $Q$ . При таком включении преобразователь имеет две резонансные частоты в основном частот-

Рис. 7.10. Частотные характеристики многофункционального перестраиваемого пьезопреобразователя, нагруженного на воду.



ном интервале ( $\omega = 2/3; 4/3$ ) с равной резонансной чувствительностью и может работать либо как однорезонансный с подавлением излучения на второй рабочей частоте, либо как широкополосный с полосой пропускания порядка 95 % (при работе на воду), сформированной в окрестности обоих резонансов.

Эти режимы работы описаны в [44] и поясняются рис. 7.10, на котором кривая 1 соответствует двухрезонансному режиму работы, кривая 2 — однорезонансному с откачкой энергии на втором резонансе в электрическую нагрузку слоев, согласованную с ними на частоте второго резонанса, кривая 3 — широкополосному, когда параметры электрической нагрузки управляемых слоев оптимизированы на максимум полосы пропускания.

Пусть теперь четыре секции, расположенные с фронтальной стороны, включены в цепь источника возбуждения, а остальные две, соединенные параллельно, нагружены на высокооборотную индуктивность. При таком включении преобразователь также имеет две резонансные частоты в основном частотном интервале, а индуктивность, подключенная к управляемым слоям, дает дополнительный третий резонанс (внесенный). При перестройке индуктивности можно эффективно перестраивать рабочую частоту преобразователя в октавном диапазоне при уменьшении мощности излучения не более чем вдвое в диапазоне перестройки, как это было описано в § 7.3.

При построении многофункциональных цилиндрических преобразователей имеются свои особенности, хотя основные прин-

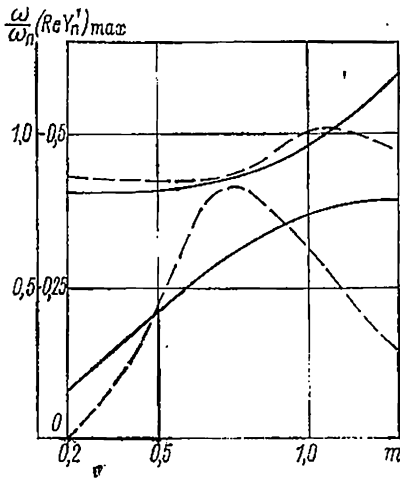


Рис. 7.11. Регулировочные характеристики многофункционального цилиндрического пьезопреобразователя, нагруженного на воду.

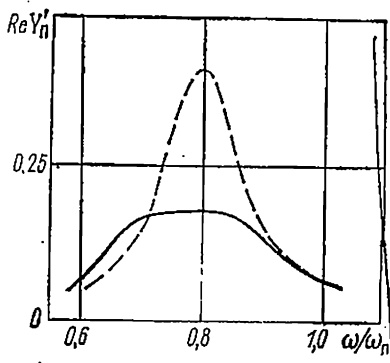


Рис. 7.12. Частотные характеристики многофункционального цилиндрического пьезопреобразователя, нагруженного на воду.

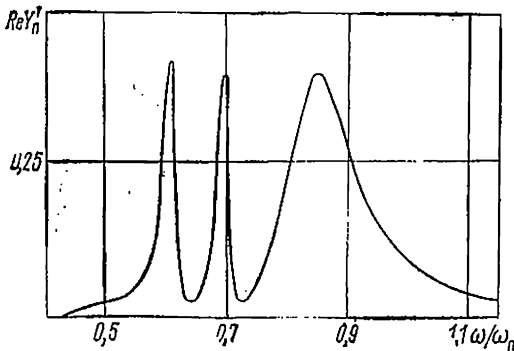


Рис. 7.13. Частотная характеристика многорезонансного цилиндрического пьезопреобразователя, нагруженного на воду.

ципы, описанные выше, полностью применены к ним. Так, например, с помощью пьезоактивных управляемых слоев можно

эффективно управлять рабочей частотой преобразователя, вводить в спектр собственных частот вносимые резонансы и формировать их в нужной частотной области. Функциональные возможности трехслойного цилиндрического преобразователя описаны в работе [42].

Преобразователь представляет собой систему трех склеенных между собой цилиндрических пьезоэлементов относительной толщиной стенки  $h_1 = 0,1$ , которые включаются в цепь источника возбуждения либо независимо, либо последовательно.

Рассмотрим работу такого преобразователя при нагрузке на воду.

В системе активный элемент толщиной  $h_1 = 0,1$  — управляемый слой толщиной  $h_1 = 0,2$  (объединяющий два наружных слоя и нагруженный с электрической стороны на активно-индуктивный шунт) возможны либо перестройка рабочей частоты, если шунт высокодобротный, либо широкополосный режим, если его параметры  $m$ ,  $Q$  оптимизированы на максимум полосы пропускания.

Возможности перестройки рабочей частоты поясняются рис. 7.11, изображающим зависимости максимума нормированной активной проводимости (штрихи) и нормированных частот  $\omega_p/\omega_n$  (сплошные линии) от параметра  $m$ .

Возможности построения широкополосной системы поясняет рис. 7.12 (сплошная линия). Штриховая линия отвечает однорезонансному режиму, когда три слоя включены в цепь источника возбуждения.

В системе активный элемент ( $h_1 = 0,1$ ) — управляемый слой ( $h_1 = 0,1$ ) — управляемый слой ( $h_1 = 0,1$ ) — рабочая среда реализуется многорезонансный режим (рис. 7.13,  $Q_1 = Q_2 = 100$ ;  $m_1 = 0,7$ ;  $m_2 = 0,8$ ).



## МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

### § 8.1. Аппроксимация зависимости основной резонансной частоты преобразователя типа стержня (пластины) от его геометрических размеров

**Изотропный резонатор.** Как правило, геометрические размеры преобразователя таковы, что его нельзя отнести к какой-либо простейшей расчетной модели. В этом случае задача расчета собственных частот и основных характеристик пьезопреобразователя сильно усложняется. [25, 129, 134]. Можно, однако, предложить простой метод расчета основной резонансной частоты преобразователя произвольных размеров, обеспечивающий необходимую точность, дать ему физическое обоснование и затем определить все требуемые характеристики преобразователя, совершающего колебания в окрестности основной резонансной частоты.

Сущность расчета состоит в аппроксимации зависимости основной частоты резонатора от его геометрических размеров некоторой кривой, которая точно описывает указанную зависимость в предельных случаях  $l \ll a$ ,  $l \gg a$  ( $2l$  — толщина пластины или длина стержня,  $a$  — радиус пластины) и в окрестности  $l \cong a$  [47].

Рассмотрим сначала изотропный резонатор типа круглой пластины со свободной поверхностью, взяв в качестве искомой величины частотный параметр  $\Omega = k_t a = \omega a / c_t$  ( $c_t$  — скорость поперечных волн), ее зависимость от геометрии резонатора рассмотрим в координатах  $x = k_t l$ ,  $y = k_t a$ , тогда каждому лучу, выходящему из начала координат, будет соответствовать определенное значение геометрического параметра  $l_1 = l/a$ .

Искомая кривая должна проходить через три точки, координаты которых известны:  $(x_0, 0)$  — точка на оси  $x$ , соответствующая основному резонансу продольного типа в тонком стержне;  $(0, y_0)$  — точка на оси  $y$ , соответствующая основному резонансу радиального типа в тонком диске;  $(x_1, y_1)$  — точка на луче  $l_1 = \pi / (2x_1)$  ( $x_1$  — первый корень уравнения  $J_0(x) - J_1(x)/x = 0$ ), соответствующая основному резонансу, порожденному чисто поперечной волной, распространяющейся под углом  $45^\circ$  к оси пла-

стины (мода Ляме), причем

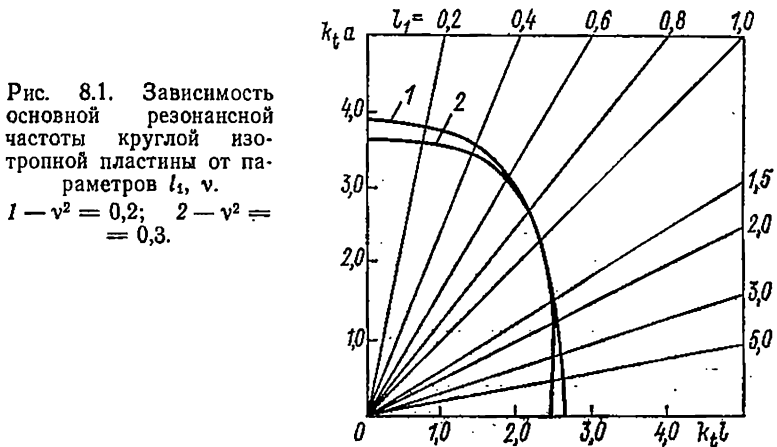
$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{3-4v^2}{1-v^2}}; & y_0 &= 2\gamma_1 \sqrt{1-v^2}; \\ x_1 &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}; & y_1 &= x_1 \sqrt{2}; & v &= c_t/c_L, \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

где  $\gamma_1$  — первый корень уравнения  $J_0(\gamma) - J_1(\gamma)/2\gamma(1-v^2) = 0$ ;  $c_L$  — скорость продольной волны.

Если при аппроксимации ограничиться центросимметричными кривыми минимального порядка, проходящими через три точки  $(x_0, 0)$ ,  $(0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$ , то в качестве уравнения искомой кривой, характеризующей зависимость основного резонанса пластины от ее геометрии, можно взять следующее:

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{y_0^2} + \frac{x^2 y^2}{x_1^2 y_1^2} \left( 1 - \frac{x_1^2}{x_0^2} - \frac{y_1^2}{y_0^2} \right) - 1 = 0. \quad (8.2)$$

Результаты расчета зависимости частоты основного резонанса круглой пластины (стержня) от ее параметров  $l_1, v$  представлены графически на рис. 8.1.



Сравнение с результатами точного расчета основной частоты колебаний круглой пластины показывает, что максимальное различие составляет доли процента.

**Пьезокерамический резонатор в режимах холостого хода и короткого замыкания.** Если резонатор является пьезоэлектрическим, то нужно прежде всего задать режим его работы с электрической стороны и дать расчетные формулы для узловых точек  $(x_0, 0)$ ,  $(0, y_0)$ ,  $(x_1, y)$  (предполагается, как и ранее, что поверхность резонатора свободна).

Рассмотрим сначала пьезоэлектрический резонатор в режиме холостого хода.

Резонансная частота тонкого пьезоэлектрического стержня, поляризованного в осевом направлении, определяется условием  $kl = \pi/2 (2n + 1)$ , где  $k = \omega/c_0$  ( $c_0$  — стержневая скорость в пьезокерамическом волноводе с осевой поляризацией).

Выбирая в качестве расчетной величины  $k_l l$ , запишем для ее определения с учетом данных [34] выражение

$$k_l l = (x_0)_{x. x} = \frac{\pi}{2} \sqrt{E^D/C_{55}}; \quad (8.3)$$

$$E^D = \frac{E + \beta \left[ 1 - \frac{2e_{31}}{C_{11} + C_{12}} (2C_{13} - e_{31}) \right]}{1 + 2\beta e_{31}^2 / C_{11} + C_{12}}; \quad E = 1 - \frac{2C_{13}^2}{C_{11} + C_{12}},$$

где  $C_{lk}$  — модули упругости при постоянном поле, нормированные на модуль  $C_{33}^E$ ,  $e_{lk}$  — пьезопостоянные, нормированные на пьезопостоянную  $e_{33}$ .

В другом предельном случае ( $l_1 \ll 1$ ) основная резонансная частота тонкого диска, поляризованного по толщине, определяется выражением

$$k_l a = (y_0)_{x. x} = \gamma_{x. x} \sqrt{\frac{C_{11} C_{13}^2}{C_{55}}}, \quad (8.4)$$

где  $\gamma_{x. x}$  — первый корень уравнения

$$J_0(\gamma) - \delta_{x. x} \frac{J_1(\gamma)}{\gamma} = 0; \quad \delta_{x. x} = \frac{C_{11} - C_{12} - \frac{2\beta}{1 + \beta} (C_{13} - e_{31})^2}{C_{11} - C_{13}^2}. \quad (8.5)$$

Моду Ляме для пьезоэлектрического резонатора с электродами на торцах можно определить приближенно, полагая в общих уравнениях  $\sigma_{rz} = 0$ ,  $D_r = E_r = 0$ .

Расчетные формулы для моды Ляме резонатора в режиме холостого хода имеют вид

$$\left. \begin{aligned} (x_1)_{x. x} &= \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{C_{13}}{C_{55}} \frac{1 - C_{13}^2/C_{11} + \beta(1 - e_{31}C_{13}/C_{11})}{C_{11} - (1 + \beta) + (C_{13} + \beta e_{31})(1 + C_{13}/C_{11})}}; \\ (y_1)_{x. x} &= x \sqrt{\frac{C_{11}}{C_{55}} \frac{1 - C_{13}^2/C_{11} + \beta(1 - e_{31}C_{13}/C_{11})}{C_{11} + C_{13} + \beta e_{31}}}; \\ \frac{l}{a} &= \frac{\pi}{2x} \sqrt{\frac{C_{13}}{C_{11}} \frac{C_{11} + C_{13} + \beta e_{31}}{C_{11} - (1 + \beta) + (C_{13} + \beta e_{31})(1 + C_{13}/C_{11})}}; \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

где  $x$  — первый корень уравнения

$$\begin{aligned} J_0(x) &= \frac{J_1(x)}{x} \frac{C_{11} - C_{12}}{C_{11} - C_{13}\alpha - \beta e_{31}(\alpha - e_{31})}; \\ \alpha &= \frac{C_{11} C_{11} - (1 + \beta) + (C_{13} + \beta e_{31})(1 + C_{13}/C_{11})}{C_{13} + C_{13} + \beta e_{31}}; \end{aligned}$$

Уравнение кривой, аппроксимирующей зависимость частоты основного резонанса пьезоэлектрического резонатора произволь-

ных размеров в режиме х.х, дается уравнением (8.2) с учетом (8.3)—(8.6). Результаты численных расчетов по уравнениям (8.2)—(8.6) графически представлены на рис. 8.2, 8.3.

Рис. 8.2. Зависимость основной резонансной частоты пьезокерамической пластины типа ТБК от параметра  $l_1$  в режимах х.х и к.з.  
1 — х.х; 2 — к.з.

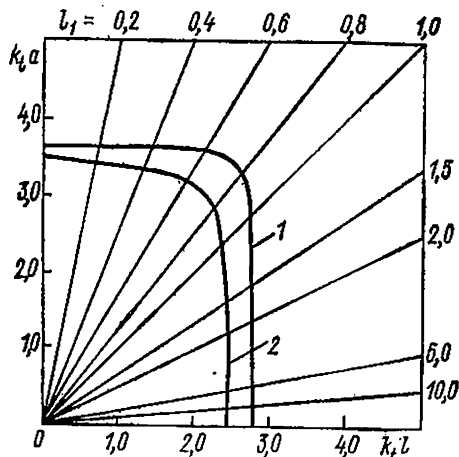
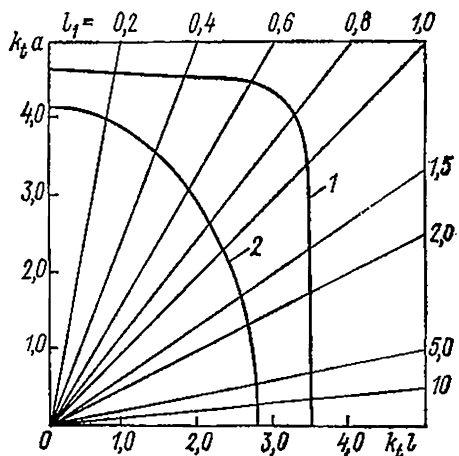


Рис. 8.3. Зависимость основной резонансной частоты пьезокерамической пластины типа ЦТС от параметра  $l_1$  в режимах х.х и к.з.  
1 — х.х; 2 — к.з.



Аналогичные величины в режиме короткого замыкания определяются следующим образом:

$$(x_0)_{к.з} = x \sqrt{E^D / C_{55}}, \quad (8.7)$$

где  $x$  — первый корень уравнения

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\beta_0}{x}; \quad \beta_0 = \frac{\beta}{E^D} \left( 1 - 2e_{31} \frac{C_{13} + \beta e_{31}}{C_{11} + C_{12} + 2\beta e_{31}^2} \right)^2.$$

Сдвиг основной резонансной частоты по сравнению с режимом х.х пропорционален эффективному коэффициенту электро-

механической связи  $\beta_0$

$$x_{x, x} - x_{k, s} = \Delta x = \frac{\pi}{2} - x = \beta_0 \frac{2}{\pi};$$

$$(y_0)_{k, s} = \gamma_{k, s} \sqrt{\frac{C_{11} - C_{13}^2}{C_{55}}}, \quad (8.8)$$

где  $\gamma_{k, s}$  — первый корень уравнения (8.5) при

$$\delta_{k, s} = \frac{C_{11} - C_{12}}{C_{11} - C_{13}^2},$$

Сдвиг резонансной частоты по сравнению с режимом холостого хода оценивается выражением

$$\Delta \gamma = \gamma_{x, x} - \gamma_{k, s} = \frac{2\beta}{1 + \beta} \frac{(C_{13} - e_{31})^2}{C_{11} - C_{13}^2} \frac{\gamma_{k, s}}{\gamma_{k, s}^2 - \delta_{k, s}(2 - \delta_{k, s})};$$

$$(x_1)_{k, s} = (x_1)_{x, x} \frac{2}{\pi} x, \quad (8.9)$$

где  $x$  — первый корень уравнения

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\beta_1}{x}; \quad \beta_1 = \frac{\beta(1 - e_{31}/\alpha)}{1 + \beta - (C_{13} + \beta e_{31})/\alpha}. \quad (8.10)$$

Результаты расчета зависимости частоты основного резонанса от физических и геометрических параметров резонатора в режиме к.з графически представлены на рис. 8.2, 8.3 в сравнении с режимом х.х.

## § 8.2. Аппроксимация зависимости основной резонансной частоты преобразователя типа цилиндра [шайбы] от его геометрических размеров

**Изотропный резонатор.** В случае цилиндрического резонатора будем считать известными длину цилиндра  $2l$ , средний радиус  $a$  и толщину стенки цилиндра  $2h$ .

Способ аппроксимации искомой зависимости остается прежним.

Общие выражения (8.1) сохраняют смысл и в этом случае, однако корни  $x_1$ ,  $\gamma_1$  определяются уравнением

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0; \quad (8.11)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= J_0 [z(1+h_1)] - \delta \frac{J_1 [z(1+h_1)]}{z(1+h_1)}; \\ a_{12} &= N_0 [z(1+h_1)] - \delta \frac{N_1 [z(1+h_1)]}{z(1+h_1)}; \\ a_{21} &= J_0 [z(1-h_1)] - \delta \frac{J_1 [z(1-h_1)]}{z(1-h_1)}; \\ a_{22} &= N_0 [z(1-h_1)] - \delta \frac{N_1 [z(1-h_1)]}{z(1-h_1)}; \\ h_1 &= h/a, \end{aligned} \right\} \quad (8.12)$$

которое определяет корень  $z = x_1$  при  $\delta = 1$  и корень  $z = \gamma_1$  при  $\delta = 1/[2(1 - \nu^2)]$ .

Результаты расчета основной резонансной частоты колебаний цилиндрического резонатора представлены на рис. 8.4.

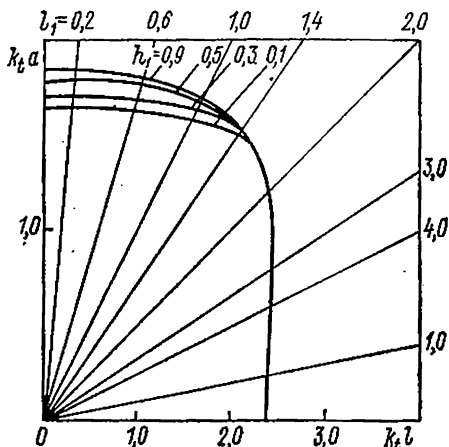


Рис. 8.4. Зависимость основной резонансной частоты изотропного цилиндра от параметров  $l_1$ ,  $h_1$  ( $\nu^2 = 0,3$ ).

**Пьезоэлектрический резонатор в режимах холостого хода и короткого замыкания.** В режиме холостого хода опорные резонансные частоты определяются выражениями

$$(x_0)_{x. x} = \frac{\pi}{2} \sqrt{E^D/C_{55}},$$

$$(y_0)_{x. x} = \gamma_{x. x} \sqrt{\frac{C_{11} - C_{13}^2}{C_{55}}}.$$

где  $\gamma_{x. x}$  — первый корень уравнения

$$\Delta + \frac{\beta}{2(1+\beta)\gamma_{h_1}} \frac{(C_{13} - e_{31})^2}{C_{11} - C_{13}^2} \{ (a_{22} - a_{12}) [(1+h_1)J_1(\gamma(1+h_1)) - (1-h_1)J_1(\gamma(1-h_1))] + (a_{12} - a_{21}) [(1+h_1)N_1(\gamma(1+h_1)) - (1-h_1)N_1(\gamma(1-h_1))] \} = 0;$$

$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ;  $a_{ik}$  определяются выражениями (8.12) при  $z = \gamma_1$ ,  $\delta = \delta_{k. z}$ ;

$$(x_1)_{x. x} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{C_{13}}{C_{55}} \frac{1 - C_{13}^2/C_{11} + \beta(1 - e_{31}C_{13}/C_{11})}{C_{11} - (1+\beta) + (C_{13} + \beta e_{31})(1 + C_{13}/C_{11})}};$$

$$(y_1)_{x. x} = x \sqrt{\frac{C_{11}}{C_{55}} \frac{1 - C_{13}^2/C_{11} + \beta(1 - e_{31}C_{13}/C_{11})}{C_{11} + C_{13} + \beta e_{31}}}.$$

где  $x$  — первый корень уравнения (8.11) при  $\delta = (C_{11} - C_{12})/[C_{11} - C_{13}\alpha - \beta e_{31}(\alpha - e_{31})]$ .

В режиме короткого замыкания резонанс  $(x_0)_{к.з}$  определяется формулой (8.7.)

$$(y_0)_{к.з} = \gamma_{к.з} \sqrt{\frac{C_{11} - C_{13}^2}{C_{55}}},$$

где  $\gamma_{к.з}$  — первый корень уравнения (8.11) при  $\delta = \delta_{к.з}$ ;

$$(x_1)_{к.з} = (x_1)_{к.х} \frac{2}{\pi} x;$$

где  $x$  — первый корень уравнения

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\beta_1}{x}; \quad \beta_1 = \frac{\beta(1 - e_{31}/\alpha)}{1 + \beta - (C_{13} + \beta e_{31})\alpha};$$

$$(y_1)_{к.з} = x \sqrt{\frac{C_{11}}{C_{55}} \frac{1 - C_{13}/C_{11}}{C_{11} + C_{13}}},$$

где  $x$  — первый корень уравнения

$$J_0(x) = \frac{J_1(x)}{x} \frac{C_{11} - C_{12}}{C_{11} - C_{13}\alpha_{к.з}};$$

$$\alpha_{к.з} = \frac{C_{11}}{C_{13}} \frac{C_{11} - 1 + C_{13}(1 + C_{13}/C_{11})}{C_{11} + C_{13}}.$$

### § 8.3. Полное описание работы преобразователя произвольных размеров в окрестности основной резонансной частоты

**Метод скрещенных нормальных волн.** Если ограничить область исследования окрестностью основной резонансной частоты, то можно предложить достаточно точный метод расчета основных характеристик преобразователя произвольных размеров, суть которого поясним на примере преобразователя типа круглого стержня длиной  $2l$ , радиусом  $a$  ( $l \gg a$ ), либо круглого диска ( $l \ll a$ ).

В предельном случае продольных колебаний тонкого стержня ( $l \gg a$ ) для описания поля в резонаторе можно использовать только одну нормальную волну, а именно, основную нормальную волну стержневого волновода радиусом  $a$ .

В другом предельном случае  $l \ll a$  система совершает чисто радиальные колебания, а для описания поля в резонаторе можно использовать только основную нормальную волну пластины толщиной  $2l$ , распространяющуюся в радиальном направлении.

Для описания поля в резонаторе произвольных размеров с произвольным соотношением геометрических параметров  $l$ ,  $a$ , совершающем колебания в окрестности основной резонансной частоты, можно использовать линейную комбинацию основной нормальной волны стержневого волновода радиусом  $a$  и основную нормальную волну волновода типа пластины толщиной  $2l$ . Другие высшие типы нормальных волн рассмотренных волново-

дов в указанном диапазоне частот неоднородны и их вклад в суммарное поле невелик.

Такая комбинация нормальных волн является простейшей и вместе с тем достаточной для описания всех особенностей поведения пьезопреобразователя в окрестности основной резонансной частоты, а сам метод (метод скрещенных нормальных волн) наиболее подходящ для разработки инженерной методики расчета пьезопреобразователей произвольных размеров с возможным обобщением его на более сложные слоистые преобразователи.

Для описания поля в преобразователе введем вектор смещений  $u(u_1, u_2)$  с компонентами  $u_1 = u_z$ ,  $u_2 = u_r$  и тензор напряжений  $\sigma_{ik}$ , из компонент которого образуем векторы  $\sigma^{(1)}(\sigma_1^{(1)}, \sigma_2^{(1)})$ ;  $\sigma_1^{(1)} = \sigma_{zz}$ ;  $\sigma_2^{(1)} = \sigma_{rz}$ ;  $\sigma^{(2)}(\sigma_1^{(2)}, \sigma_2^{(2)})$ ;  $\sigma_1^{(2)} = \sigma_{rz}$ ;  $\sigma_2^{(2)} = \sigma_{rr}$  действующие на координатных поверхностях  $z = \text{const}$ ,  $r = \text{const}$  соответственно.

Для определения соотношения между нормальными волнами в их линейной комбинации следует воспользоваться формулами Бетти [62], имеющими смысл соотношений взаимности в теории упругости, которые поясняются ниже.

Пусть  $u_n$ ,  $u_m$  — решения уравнений распространения, регулярные в области определения,  $a\sigma_n^{(1)}$ ,  $\sigma_n^{(2)}$ ,  $\sigma_m^{(1)}$ ,  $\sigma_m^{(2)}$  — соответствующие им векторы напряжений, тогда формулы Бетти имеют вид

$$(u_n, \sigma_m^{(1)})_1 + (u_n, \sigma_m^{(2)})_2 = (u_m, \sigma_n^{(1)})_1 + (u_m, \sigma_n^{(2)})_2, \quad (8.13)$$

где  $(x, y)_1 = \left( \int_0^a (\sum x_i y_i) r dr \right)_{z=l} - \left( \int_0^a (\sum x_i y_i) r dr \right)_{z=-l}$ ;  $(x, y)_2 = \left( r \int_{-l}^l (\sum x_i y_i) dz \right)_{r=a}$  — скалярные произведения, определенные на торцах  $z = \pm l$  либо на боковой поверхности преобразователя  $r = a$ .

Формулы Бетти (8.13) можно использовать для вывода различных форм уравнения собственных частот преобразователя в задачах с однородными граничными условиями или для решения неоднородных граничных задач, связанных с возбуждением преобразователя.

Конкретный вид суперпозиции нормальных волн в методе скрещенных нормальных волн зависит от вида граничных условий, что поясняется следующими примерами.

**Уравнение собственных частот пьезопреобразователя типа круглого стержня (пластины) произвольных размеров.** Рассмотрим однородную граничную задачу на колебания изотропного пассивного резонатора при граничных условиях вида  $r = a$ ,  $\sigma_{rr} = \sigma_{rz} = 0$ ,  $z = \pm l$ ,  $\sigma_{zz} = \sigma_{rz} = 0$ .



В этом случае симметричная и антисимметричная формы колебаний являются независимыми. В случае симметричных колебаний запишем решение в виде суперпозиции

$$u = A_1 u_1^s + A_2 u_2^s; \quad (8.14)$$

$$u_1^s = \begin{pmatrix} u_{z1}^s \\ u_{r1}^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{z1}(r) \sin k_3 z \\ u_{r1}(r) \cos k_3 z \end{pmatrix}; \quad u_2^s = \begin{pmatrix} u_{z2}^s(z) J_0(k_{1s} r) \\ u_{r2}^s(z) J_1(k_{1s} r) \end{pmatrix};$$

$$u_{z1}^s = J_0(k_{11} r) + \beta_0 J_0(k_{12} r); \quad u_{r1}(r) = \frac{k_{11}}{k_3} J_1(k_{11} r) - \beta_0 \frac{k_3}{k_{12}} J_1(k_{12} r);$$

$$\beta_0 = \frac{2k_{11}k_{12}}{2k_3^2 - k_1^2} \frac{J_1(k_{11}a)}{J_1(k_{12}a)}; \quad k_{11}^2 = v^2 k_1^2 - k_3^2; \quad k_{12}^2 = k_1^2 - k_3^2,$$

где  $k_3$  — постоянная распространения основной нормальной волны стержневого волновода со свободной поверхностью.

$$u_{zz}^s = \frac{k_{31}}{k_{1s}} \sin k_{31} z = -\gamma^s \frac{k_{1s}}{k_{32}} \sin k_{32} z; \quad u_{r2}^s = \cos k_{31} z + \gamma^s \cos k_{32} z;$$

$$\gamma^s = \frac{2k_{31}k_{32}}{2k_{1s}^2 - k_1^2} \frac{\sin k_{31} l}{\sin k_{32} l}; \quad k_{31}^2 = v^2 k_1^2 - k_{1s}^2; \quad k_{32}^2 = k_1^2 - k_{1s}^2,$$

где  $k_{1s}$  — постоянная распространения основной симметричной нормальной волны пластины со свободной поверхностью.

Применяя к решению (8.14) операцию скалярного произведения на векторы  $\sigma_1^s, (\sigma_{zz, 1}^s; \sigma_{rz, 1}^s) \equiv \sigma_1^{(s)}$ ;  $\sigma_2^s (\sigma_{rz, 2}^s; \sigma_{rr, 2}^s) \equiv \sigma_2^{(s)}$ , соответствующие векторам  $u_1^s, u_2^s$ , получаем с учетом формул Бетти систему уравнений относительно произвольных постоянных  $A_1, A_2$ :

$$A_1 (u_1^s, \sigma_1^s)_1 + A_2 (u_2^s, \sigma_1^s)_1 = 0;$$

$$A_1 (u_1^s, \sigma_2^s)_2 + A_2 (u_2^s, \sigma_2^s)_2 = 0.$$

Основная резонансная частота симметричных колебаний резонатора произвольных размеров определяется уравнением

$$\Delta^s = (u_1^s, \sigma_1^s)_1 (u_2^s, \sigma_2^s)_2 - (u_2^s, \sigma_1^s)_1 (u_1^s, \sigma_2^s)_1 = 0. \quad (8.15)$$

В случае антисимметричных колебаний решение имеет вид  $u = A_1 u_1^a + A_2 u_2^a$ ;

$$u_1^a = \begin{pmatrix} u_{z1}(r) \cos k_3 z \\ u_{r1}(r) \sin k_3 z \end{pmatrix}; \quad u_2^a = \begin{pmatrix} u_{z2}^a(z) J_0(k_{1a} r) \\ u_{r2}^a(z) J_1(k_{1a} r) \end{pmatrix};$$

$$u_{z2}^a = -\frac{k_{31}}{k_{1a}} \cos k_{31} z + \gamma^a \frac{k_{1a}}{k_{32}} \cos k_{32} z;$$

$$u_{r2}^a = \sin k_{31} z + \gamma^a \sin k_{32} z; \quad \gamma^a = \frac{2k_{31}k_{32}}{2k_{1a}^2 - k_1^2} \frac{\cos k_{31} l}{\cos k_{32} l}.$$

где  $k_{1a}$  — постоянная распространения основной антисимметричной (изгибной) нормальной волны в пластине со свободной поверхностью.

Уравнение, определяющее основную резонансную частоту антисимметричных (изгибных) колебаний резонатора произвольных размеров, имеет вид

$$\Delta^a = (u_1^a, \sigma_1^a)_1 (u_2^a, \sigma_2^a)_2 - (u_2^a, \sigma_1^a)_1 (u_1^a, \sigma_2^a)_2 = 0. \quad (8.16)$$

Результаты численных расчетов уравнений (8.15), (8.16) для симметричной  $s$  и антисимметричной  $a$  мод колебаний для изо-

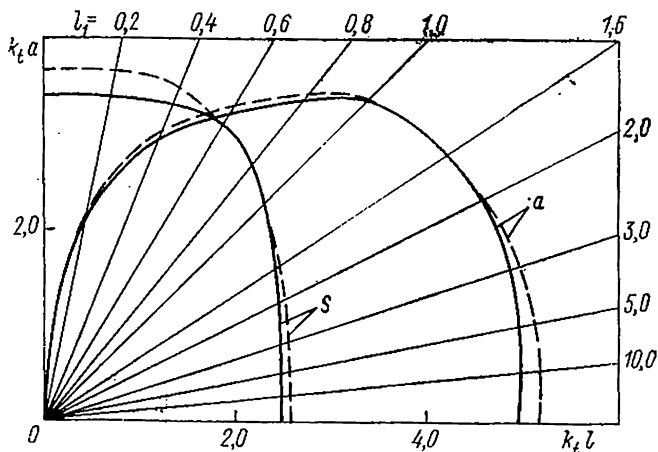


Рис. 8.5. Зависимость основной резонансной частоты симметричных  $s$  и антисимметричных  $a$  колебаний круглой пластины от параметра  $l_1$ .

—  $\nu^2 = 0,2$ ; - - -  $\nu^2 = 0,3$ .

тропного резонатора с параметром  $\nu^2 = 0,2; 0,3$  представлены на рис. 8.5. Численные значения резонансных частот соответствуют результатам, полученным в § 8.1.

**Основные характеристики преобразователя произвольных размеров.** Рассмотрим теперь методом скрещенных нормальных волн задачи на возбуждение пьезопреобразователя произвольных размеров, нагруженного с электрической и акустической сторон. Соответствующая граничная задача формулируется в виде

$$\left. \begin{aligned} r = a_1, \quad z = \pm l; \\ \frac{\sigma_{rr}}{C_{33}^D} = \beta_1 e'_{31} \frac{D_z}{l_{33}}; \quad \frac{\sigma_{zz}}{C_{33}^D} \pm ik_L \alpha_a^\pm u_z = \beta_1 \frac{D_z}{e_{33}}; \\ e'_{31} = e_{31}/e_{33}; \quad \beta_1 = \frac{\beta}{1 + \beta}; \quad \beta = e_{33}^2 / (e_{33} C_{33}^E), \end{aligned} \right\} \quad (8.16a)$$

где  $D_z$  — осевая компонента вектора электрической индукции;  $\alpha_a^\pm$  — удельные сопротивления акустических нагрузок на торцах

$z = \pm l$ , нормированные на волновое сопротивление пьезопреобразователя  $\rho c_L$ ; ( $c_L^2 = C_{33}^D/\rho$ ).

Под величинами  $\sigma_{ik}$  в граничных условиях (8.16) понимаются составляющие напряжений, обусловленных упругими деформациями, тогда как пьезонапряжения играют роль источника возбуждения.

Общее решение задачи (8.16) имеет вид

$$u = A_1 u_1^s + A_2 u_1^a + A_3 u_2^s + A_4 u_2^a. \quad (8.166)$$

Применяя к решению (8.16) операцию скалярного произведения на векторы  $\sigma_1^s, \sigma_1^a, \sigma_2^s, \sigma_2^a$ , получаем с учетом (8.15) систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \Sigma a_{ik} A_k &= F_i; \quad i, k = 1 + 4; \\ a_{11} &= 2(u_1^s, \sigma_1^s)_i; \quad a_{13} = 2(u_2^s, \sigma_1^s)_i; \quad a_{22} = 2(u_1^a, \sigma_1^a)_i; \\ a_{24} &= 2(u_2^a, \sigma_1^a)_i; \quad a_{31} = (u_1^s, \sigma_2^s)_i; \quad a_{33} = (u_2^s, \sigma_2^s)_i; \\ a_{42} &= (u_1^a, \sigma_2^a)_i; \quad a_{44} = (u_2^a, \sigma_2^a)_i; \quad a_{ik} = 0 \text{ для остальных } i, k, \\ F_1 &= -\delta^s(u_z^s, u_{z1}^s)_i - \delta^a(u_z^a, u_{z1}^a)_i + \\ &\quad + 2\beta_1(D'_z, u_{z1}^s)_i + \beta_1 e'_{31}(D'_z, u_{r1}^s)_i; \\ F_2 &= -\delta^s(u_z^s, u_{z1}^a)_i - \delta^s(u_z^a, u_{z1}^a)_i; \\ \delta^s &= ik_L a(\alpha^+ + \alpha^-); \quad \delta^a = ik_L a(\alpha^+ - \alpha^-); \\ F_3 &= -\delta^s(u_z^s, u_{z2}^s)_i - \delta^a(u_z^a, u_{z2}^a)_i + \\ &\quad + 2\beta_1(D'_z, u_{z2}^s)_i + \beta_1 e'_{31}(D'_z, u_{r2}^s)_i; \\ F_4 &= -\delta^a(u_z^s, u_{z2}^a)_i - \delta^s(u_z^a, u_{z2}^a)_i; \quad D'_z = D_z/e_{33}, \end{aligned} \right\} \quad (8.17)$$

где  $(x, y)_i$  — скалярное произведение, определенное на торце  $z = l$ .

Если торцы пьезопреобразователя являются эквипотенциальными (электроды покрывают торцы полностью), то справедливо приближение

$$D_z = D_z(r); \quad \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0; \quad E_z = E_z(z); \quad \frac{\partial E_z}{\partial r} = 0.$$

В этом приближении интегрирование уравнения прямого пьезоэффекта дает соотношение

$$D_z = e_{33} \frac{U}{2l} + e_{33} \frac{u_z^s(l)}{l} + e_{31} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \int_{-l}^l \frac{u_r^s}{2l} dz, \quad (8.18)$$

где  $U$  — напряжение, приложенное к торцам пьезоэлемента.

Подстановка (8.18) в систему (8.17) позволяет выразить решение граничной задачи через напряжение, приложенное к преобразователю, а следовательно, определить все его характеристики.

Для преобразователей, слабо нагруженных с акустической стороны ( $\alpha^+ \ll 1$ ), и в случае возбуждения однородным по длине

резонатора полем электрической индукции симметричная мода колебаний является доминирующей, а система уравнений (8.17) в приближении  $\alpha^{\pm} \ll 1$  расщепляется на независимые подсистемы

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} b_{11}A_1 + b_{13}A_3 = B_1; & \quad b_{22}A_2 + b_{24}A_4 = B_2; \\ b_{31}A_1 + b_{33}A_3 = B_3; & \quad b_{42}A_2 + b_{44}A_4 = B_4; \end{aligned} \right\} \quad (8.19) \\
 & b_{11} = a_{11} + \left( \delta^s - \frac{2\beta_1}{l_1} \right) (u_{z1}^s, u_{z1}^s)_l - \\
 & - \frac{\beta_1}{l} e_{31} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \int_{-l}^l u_{r2}^s dz, u_{z1}^s \right)_l - \beta_1 e'_{31} (b_2, u_{z2}^s)_2; \quad l_1 = l/a; \\
 & b_{13} = a_{13} + \left( \delta^s - \frac{2\beta_1}{l_1} \right) (u_{z2}^s, u_{z1}^s)_l - \frac{\beta_1}{l_1} l_{31} \times \\
 & \times \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \int_{-l}^l u_{r2}^s dz, u_{z1}^s \right)_l - \beta_1 e'_{31} (b_2, u_{r1}^s)_2 \\
 b_n & = \frac{1}{l_1} u_{zn}^s(l, a) + \frac{1}{2l_1} e'_{31} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \int_{-l}^l u_{rn}^s dz \right)_{z=a}; \quad n = 1, 2; \\
 b_{31} & = a_{31} + \left( \delta^s - \frac{2\beta_1}{l_1} \right) (u_{z1}^s, u_{z2}^s)_l - \\
 & - \beta_1 e'_{31} (b_2 u_{r2}^s)_2 - \frac{\beta_1}{l_1} e'_{31} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \int_{-l}^l u_{r2}^s dz, u_{z2}^s \right)_l \\
 b_{33} & = a_{33} + \left( \delta^s - \frac{2\beta_1}{l_1} \right) (u_{z1}^s, u_{z2}^s)_l - \\
 & - \beta_1 e'_{31} (b_2, u_{r2}^s)_2 - \frac{\beta_1}{l_1} e'_{32} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \int_{-l}^l u_{r2}^s dz, u_{z2}^s \right)_l \\
 b_{22} & = a_{22} + \delta^s (u_{z1}^a, u_{z1}^a)_l; \quad b_{24} = a_{24} + \delta^s (u_{z2}^a, u_{z1}^a)_l; \\
 b_{42} & = a_{42} + \delta^s (u_{z1}^a, u_{z2}^a)_l; \quad b_{44} = a_{44} + \delta^s (u_{z2}^a, u_{z2}^a)_l; \\
 B_1 & = \beta_1 \frac{U}{2l} [2(1, u_{z1}^s)_l + e'_{31}(1, u_{r1}^s)_2]; \quad B_2 = -\delta^a (u_z^s, u_{z1}^a)_l \\
 B_3 & = \beta_1 \frac{U}{2l} [2(1, u_{z2}^s)_l + e'_{31}(1, u_{r2}^s)_2]; \quad B_4 = -\delta^a (u_z^s, u_{z2}^a)_l.
 \end{aligned}$$

Проводимость пьезопреобразователя  $Y_n$  и коэффициент передачи по мощности определяются формулами

$$\begin{aligned}
 Y_n & = i\omega C_n; \quad \frac{C_n}{C_0} = 1e2\beta_1 \int_0^1 \left[ A'_1 \frac{u_{z1}^s(l)}{l} + A'_3 \frac{u_{z2}^s(l)}{l} \right] r dr + \\
 & + 2\beta_1 e_{31} \int_{-l}^l \left[ A'_1 \frac{u_{r1}^s(a)}{2l} + A'_3 \frac{u_{r2}^s(a)}{2l} \right] dz; \quad (8.20) \\
 A'_n & = A_n \frac{2l}{U\beta_1}; \quad n = 1, 2,
 \end{aligned}$$

где  $C_n$  — емкость зажатого пьезоэлемента

$$\Pi = \frac{\alpha^+}{\alpha^+ + \alpha^-} \frac{4R_r \operatorname{Re} Y_n}{|1 + R_r(Y_s + Y_n)|^2},$$

$Y_s$  — проводимость электрической нагрузки на пьезопреобразователь.

Уравнения  $\Delta^s = b_{11}b_{33} - b_{13}b_{31} = 0$ ;  $\Delta^a = b_{22}b_{44} - b_{24}b_{42} = 0$  определяют зависимость основной резонансной частоты симмет-

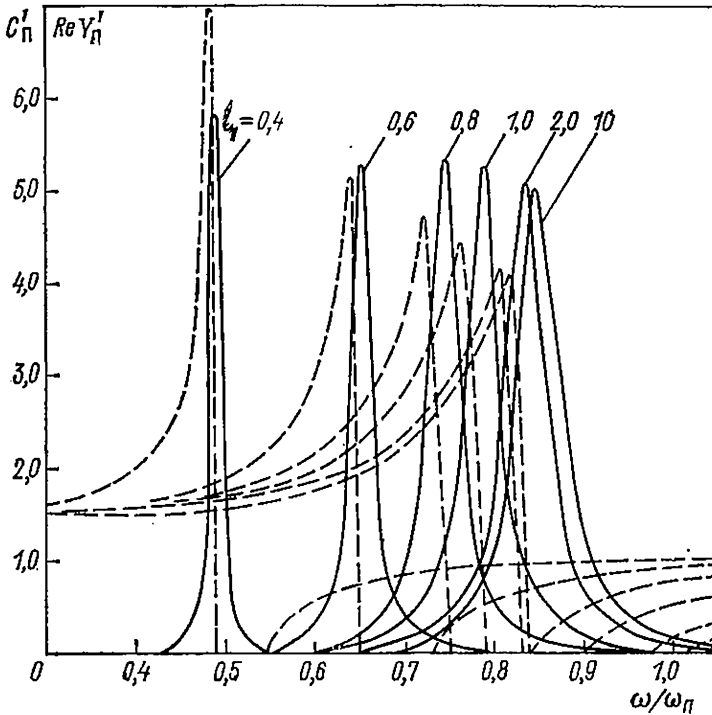


Рис. 8.6. Частотные характеристики пьезопреобразователя типа круглой пластины (стержня) произвольных размеров, нагруженного на воду.

ричных или антисимметричных колебаний нагруженного пьезопреобразователя в режиме короткого замыкания от полного набора физических и геометрических параметров преобразователя и нагрузки.

Численные расчеты полной проводимости преобразователя по формулам (8.19), (8.20) были выполнены для пьезопреобразователя, нагруженного на воду, при следующих значениях исходных параметров:  $\alpha_a^+ \leq 0,06$ ;  $\bar{\alpha}_a = 0$ ;  $\beta = 0,15$ ,  $e'_{31} = -0,21$ ;  $\nu^2 = 0,3$ .

Результаты расчетов частотной зависимости активной составляющей  $\operatorname{Re} Y_n / \omega_n C_n$  (сплошные линии) и реактивности со-

ставляющей  $C'_n = \text{Im} Y_n / \omega C_n$  (штриховые линии,  $\omega_n$  — частота антирезонанса тонкого стержня) представлены на рис. 8.6 для различных значений геометрического параметра  $l_1 = l/a$ .

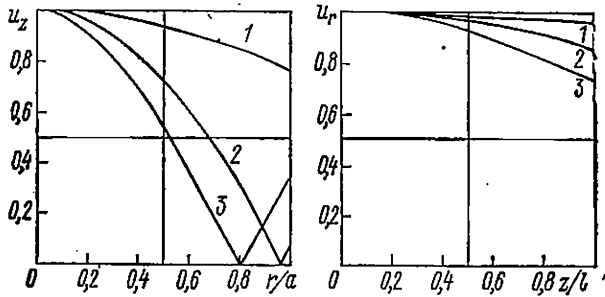


Рис. 8.7. Эпюры распределения смещений ( $l_1 = 0,2$ ).

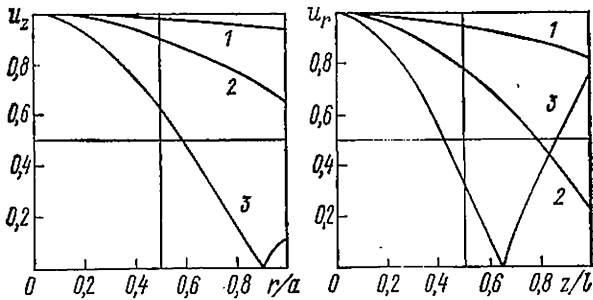


Рис. 8.8. Эпюры распределения смещений ( $l_1 = 1,0$ ).

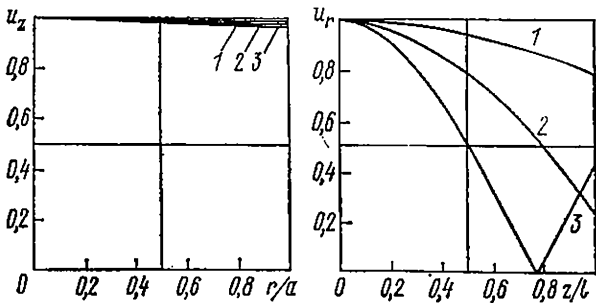


Рис. 8.9. Эпюры распределения смещений ( $l_1 = 5,0$ ).

При достаточно больших значениях параметра  $l_1$  ( $l_1 > 2$ ) метод скрещенных нормальных волн дает результаты, полностью совпадающие с аналогичными, полученными по одномерной теории продольных колебаний тонких стержней. С уменьшением параметра  $l_1$  (увеличением радиуса при неизменной длине) понижается частота резонанса, а вся резонансная кривая сме-

щается в область более низких частот с незначительной деформацией формы и изменением амплитуды.

При дальнейшем уменьшении параметра  $l_1$  ( $l_1 < 0,5$ ) в резонаторе начинают преобладать радиальные смещения, а не продольные, вследствие чего акустическая нагруженность на торцах уменьшается, растет величина активной составляющей проводимости и уменьшается полоса пропускания.

На рис. 8.7—8.9 приведены эпюры распределения компонент вектора смещения на боковой поверхности  $u_r(z)$  и на излучающем торце  $u_z(r)$ , параметром кривых является частота (кривая 1 —  $\omega = 0,5\omega_n$ , кривая 2 —  $\omega = \omega_n$ , кривая 3 —  $\omega = 1,5\omega_n$ ).

Так, например, в колебательной системе типа тонкого диска ( $l_1 = 0,2$ ) радиальная компонента  $u_r(a)$  распределена практически равномерно по боковой поверхности резонатора, тогда как осевая компонента  $u_z(r, l)$  распределена неравномерно по поверхности торца.

При увеличении осевого размера ( $l = 1,0$ ) обе компоненты вектора смещения распределены неравномерно по поверхности резонатора.

При дальнейшем увеличении параметра  $l_1$  ( $l_1 = 5,0$ ) осевая компонента вектора смещения распределена практически равномерно по поверхности торца (поршневые распределения), тогда как радиальная компонента распределена неравномерно по боковой поверхности тонкого стержня.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ  
ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ПОСРЕДСТВОМ  
ВИЗУАЛИЗАЦИИ СОЗДАВАЕМЫХ ИМИ  
АКУСТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ****§ 9.1. Физические основы методов визуализации акустических  
и тепловых полей пьезоэлементов**

В настоящее время существует большое количество различных методов визуализации ультразвуковых (УЗ) полей и многие из них пригодны для получения изображений акустических полей, создаваемых как отдельными пьезоэлементами, так и составными пьезопреобразователями. Эти методы отличаются друг от друга трудностью технической реализации, чувствительностью, временем экспозиции, качеством изображения. Выбор того или иного метода и основных параметров установок, предназначенных для этой цели, зависит от постановки задачи и может быть произведен на основании данных [14, 38, 39, 103, 104, 119].

Широкое применение нашли различные оптические методы визуализации УЗ полей. В основу этих методов положено явление фазовой модуляции светового пучка, прошедшего через оптически прозрачную среду, в которой возбуждено акустическое поле. Фазовая модуляция светового пучка возникает в результате того, что в звуковом поле происходит изменение плотности среды, которое, в свою очередь, приводит к соответствующему изменению оптического показателя преломления среды. В зависимости от характеристик и условий испытания пьезокерамических элементов (ПКЭ) для визуализации их УЗ полей могут быть применены: теневой метод; метод дифракции света на УЗ; голографические методы [14, 102, 119].

Распределение амплитуд колебаний поверхности исследуемого ПКЭ может быть получено методами оптической голографии [102, 119]. Наиболее просто реализуется метод усреднения по времени, но этим методом можно производить анализ вибраций в довольно малом диапазоне амплитуд от  $\lambda_c/4$  до  $5\lambda_c$ , где  $\lambda_c$  — длина волны света лазерного источника, с помощью которого получается голограмма, что в единицах длины составляет от 0,2 до 3,5 мкм. Верхний предел этого диапазона можно расширить с помощью стробоголографического метода анализа вибраций, а нижний предел уменьшить с помощью метода модуляции по фазе опорного пучка или метода «голографического вычитания» и довести его до амплитуд порядка  $0,01\lambda_c$  (0,005—



0,007 мкм). Если на поверхности исследуемых образцов возможно создание зеркального покрытия, то распределение амплитуд колебаний поверхности ПКЭ может быть получено методом двухлучевой интерферометрии [14, 119]. Реализация этих способов требует применения сложных экспериментальных схем, дорогостоящих установок и высокой квалификации обслуживающего персонала. По этой причине их нельзя рекомендовать для непосредственного использования в заводских лабораториях, но в условиях специализированной научно-исследовательской лаборатории оптические методы вполне пригодны.

Исследования, посвященные синтезу и изучению физических свойств жидких кристаллов (ЖК), способствовали появлению нового класса визуализаторов УЗ полей, созданных в жидкостях или газах [55—57, 119, 125]. Физические свойства некоторых ЖК позволяют также использовать их для визуализации тепловых полей ПКЭ. Следует отметить, что изготовление визуализаторов УЗ, использующих свойства ЖК, не вызывает серьезных затруднений и при наличии пастообразных ЖК или жидкокристаллических пленок может быть произведено в любой лаборатории. Сопоставление параметров ЖК детекторов (ЖКД) с параметрами реагирующих органов других систем визуализации показывает, что при достаточно простом конструктивном исполнении ЖКД обладают рядом преимуществ. В качестве основного достоинства ЖКД можно указать возможность получения значительной площади изображения поля (более  $10^4$  см<sup>2</sup>).

ЖК обладают значительным набором уникальных свойств, которые с разной степенью полноты описаны в литературе [38, 39]. В настоящей работе остановимся только на использовании для визуализации УЗ и тепловых полей термооптического эффекта ЖК холестерического типа. Это обусловлено тем, что к настоящему времени в СССР уже освоен выпуск термохромных пленок, основу которых составляют эфиры холестерина.

Суть термооптического эффекта холестерических ЖК заключается в следующем. В пределах узкой спектральной полосы, соответствующей видимой части спектра, наблюдается селективное отражение света, падающего на слой ЖК, причем длина волны отраженного света зависит только от температуры и угла наблюдения. При наблюдении под постоянным углом зрения, но при изменяющейся температуре окраска холестерического ЖК изменяется от красного, пробегая через все цвета спектра, до фиолетового. Температура  $T_n$ , при которой ЖК становится красной, носит название нижнего порога холестерической мезофазы, а температура  $T_v$ , при которой кристалл окрашен в фиолетовый цвет, характеризует верхний порог мезофазы. Разность температур  $\Delta T_{\phi} = T_v - T_n$  называется диапазоном холестерической мезофазы. Малые изменения температуры ЖК приводят к значительным изменениям длины волны рассеянного света (до

0,1 мкм на 1°С), которые легко обнаруживаются при визуальном наблюдении картины [39].

Жидкокристаллические пленки (ЖКП) на основе холестерических ЖК имеют достаточную механическую прочность и эластичность, допускают многократное использование и длительное хранение. Эти и другие свойства (см. § 9.3) ЖКП позволяют без труда изготавливать ЖКД произвольной конфигурации, причем легко могут быть изготовлены не только плоские

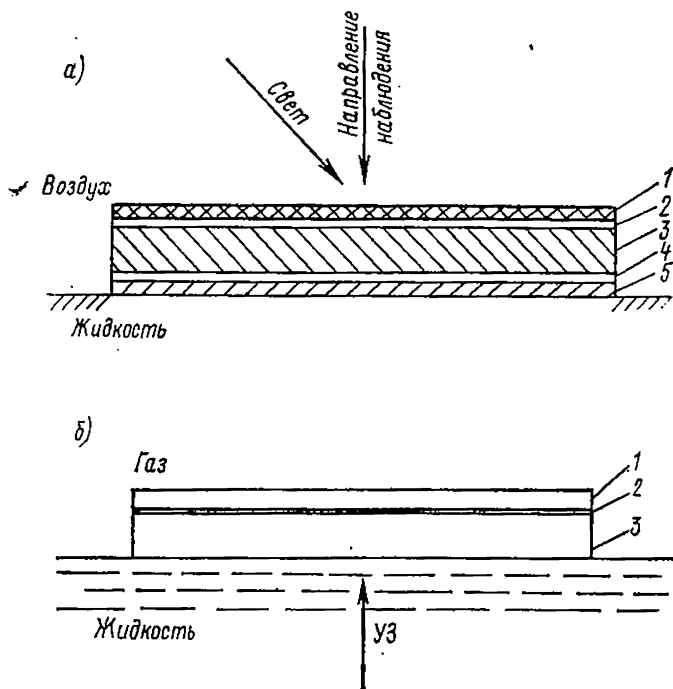


Рис. 9.1. Жидкокристаллический детектор ультразвука.  
1 — ЖКП; 2 — контактная жидкость; 3 — пластина-поглотитель;  
4 — электропроводный слой; 5 — защитный слой.

детекторы, но и детекторы, повторяющие форму практически любой криволинейной поверхности.

Простейший ЖКД, предназначенный для визуализации УЗ поля в жидкости (рис. 9.1), содержит: ЖКП, контактную жидкость, пластину-поглотитель (ПП). При облучении детектора ультразвуком в ПП возникает тепловое поле, распределение температур в котором соответствует распределению интенсивности в волне на границе раздела жидкость — ПП и на которое ЖКП реагирует изменением цвета.

Анализ работ [13, 55—57, 71], посвященных применению холестерических ЖК для визуализации УЗ в жидкостях, показал, что детектор такого типа представляет собой многослойную систему. Минимальное число слоев — два. Кроме ЖКП, в зави-

симости от требований, предъявляемых к детектору, в нем появляются дополнительные слои различного функционального назначения (рис. 9.1, а): пластина, обеспечивающая механическую прочность конструкции, слой материала с высоким удельным электрическим сопротивлением для поддержания заданной температуры ЖКД, защитный слой и т. д.

Во всех рассматриваемых случаях ЖКД помещался на границе раздела жидкость — газ. Визуализируемый УЗ пучок падал из жидкости нормально к поверхности ПП. В общем случае вторая среда может быть жидкостью или твердым телом.

Исходя из этих положений можно найти связь между параметрами УЗ поля и распределением температур, возникающим на поверхности ПП при поглощении в нем УЗ. Для этого нужно решить задачу истечения тепла из плоской стенки с внутренними источниками тепла.

Основные допущения при решении задачи:

- 1) поглощение УЗ происходит только в поглотителе;
- 2) мощность внутренних источников тепла  $\omega$  остается постоянной по всей толщине поглотителя  $h$  и связана с интенсивностью падающей волны  $I_0$  соотношением

$$\omega(x, y)h = DI_0(x, y), \quad (9.1)$$

где  $D$  — коэффициент поглощения УЗ поглотителем,  $x, y$  — плоскость, совпадающая с верхней поверхностью ПП;

3) растекание тепла вдоль слоев отсутствует ( $h_i \ll \sqrt{S}$ , где  $h_i$  — толщина соответствующего слоя,  $S$  — площадь ЖКД);

4) параметры акустического и теплового полей не зависят от времени.

Совместное решение уравнений теплового баланса для верхней и нижней сторон ПП позволяет найти температуру верхней поверхности ЖКП:

$$T_n(x, y) = \Delta T(x, y) + T_0; \quad (9.2)$$

$$\Delta T(x, y) = \frac{B}{A} DI_0(x, y); \quad (9.3)$$

$$T_0 = [T + T_1(A - 1)] A^{-1}; \quad (9.4)$$

$$A = \alpha_1 \left( R + \frac{h}{\kappa} + R_1 \right); \quad B = R + \frac{h}{2\kappa};$$

$$R = \frac{1}{\alpha} + \frac{h_2}{\kappa_2} + \frac{h_4}{\kappa_4} + \dots + \frac{h_l}{\kappa_l};$$

$$R_1 = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{h_1}{\kappa_1} + \frac{h_3}{\kappa_3} + \dots + \frac{h_f}{\kappa_f}.$$

где  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности материала ПП;  $T, R, \alpha$  — соответственно температура, термическое сопротивление и коэффициент теплопередачи в среду, из которой на ПП падает УЗ;  $T_1, R_1, \alpha_1$  — соответственно температура, термическое со-

противление, коэффициент теплоотдачи в среду, из которой наблюдают изображение;  $h_i, \kappa_i$  — толщины слоев и коэффициенты теплопроводности контактной жидкости, ЖКП и любого слоя между ЖКП и средой, из которой наблюдают изображение;  $h_i, \kappa_i$  — толщины слоев и коэффициенты теплопроводности соответственно подогревателя, защитного покрытия и любого слоя между ПП и средой, из которой падает УЗ.

Выражения (9.2), (9.3) и (9.4) могут быть использованы для расчета параметров ЖКД, состоящего из произвольного числа слоев. Основной трудностью при расчете является оценка коэффициентов теплопередачи  $\alpha$  и  $\alpha_1$ , величина которых может быть найдена из [85]. Уравнение (9.3) определяет величину превышения температуры в каждой точке поверхности пленки, вызванного поглощением УЗ в поглотителе, над температурой поверхности пленки  $T_0$ , установившейся при  $I_0 = 0$  и определяемой выражением (9.4). Температура  $T_n$ , если она приходится на диапазон существования ЖК фазы, может быть сопоставлена с длиной волны отраженного света; это позволяет по спектральной характеристике ЖКП (см., например, рис. 9.8) определить ее величину и, следовательно, величину  $I_0$ , входящую в выражение (9.2).

Значение  $\Delta T$  (при прочих равных условиях) зависит от коэффициента поглощения УЗ  $D$ , величина которого для слоистых систем может быть рассчитана [18, 120], причем акустическое согласование системы состоит в подборе параметров слоев так, чтобы обеспечить максимальное значение  $D$  на заданной частоте.

Для повышения чувствительности детектора необходимо, чтобы в исходном состоянии ( $I_0 = 0$ ) температура пленки равнялась или была несколько больше порога существования холестерической мезофазы пленки  $T_n$  (красный цвет). Как видно из выражения (9.4), этого можно достичь подбором температур сред, с которыми ЖКД находится в контакте. В реальных условиях это не всегда удается и тогда необходимо производить термостатирование ЖКД. Пропускание по электропроводному слою электрического тока приводит к выделению из него за единицу времени с единицы поверхности тепла  $\Delta q$ . Это обеспечивает добавку температуры

$$T_q = \frac{\Delta q \left( R' + \frac{h_p}{2\kappa_p} \right)}{\alpha_1 \left( R' + \frac{h_p}{\kappa_p} + R'_1 \right)}, \quad (9.5)$$

где  $R' = (1/\alpha) + (h_n/\kappa_n)$ ;  $R'_1 = 1/\alpha_1 + h/\kappa + h_i/\kappa_i$ ;  $h_p, h_n$  — толщины электропроводного и защитного слоев;  $\kappa_p, \kappa_n$  — теплопроводности электропроводного и защитного слоев;  $h_i, \kappa_i$  — толщина и теплопроводность любого слоя, лежащего над электропроводным слоем.

Выражение (9.5) получено для случая, когда между жидкостью и электропроводным слоем лежит только защитный слой.

Температура  $T_q$  является добавкой к стационарной части распределения температур и входит третьим слагаемым в формулу (9.2).

Максимум чувствительности детектора будет при

$$T_0 + T_q \geq T_n. \quad (9.6)$$

Отсюда величина удельной мощности  $\Delta q$ , необходимая для обеспечения оптимальных условий работы ЖКД (с учетом  $h_b/\kappa_s \ll \ll R'_1 R'$ ) равна

$$\Delta q = (T_n - T_0) \alpha_1 \left( 1 + \frac{R'_1}{R'} \right). \quad (9.7)$$

Из выражения (9.7) следует, что минимальная величина удельной мощности подогревателя обеспечивается при малых значениях разности  $T_n - T_0$  и толщины поглотителя  $h$ . Толщина защитного слоя должна быть как можно больше.

Применение выражений (9.2) — (9.4) и (9.7) для расчета параметров ЖКД рассмотрим на примере одного из наиболее важных вариантов: ЖКД лежит на границе раздела вода — воздух, УЗ волна падает из воды. Прежде всего оценим параметры, входящие в термические сопротивления. Расчеты показывают, что при разностях температур  $T_n - T$  и  $T_n - T_1$ , достигающих  $31^\circ\text{C}$ , отношение  $\alpha_1/\alpha \leq 0,02$ . Полученное значение  $\alpha_1/\alpha = 0,02$  может служить критерием необходимости учета членов вида  $\alpha_1(h_j/\kappa_j)$  при расчете. В соответствии с вводимым критерием при оценке параметров детектора можно пренебречь ЖКП, контактной жидкостью и другими слоями, имеющими малую толщину или большой коэффициент теплопроводности. Кроме того, величиной  $1/\alpha$ , входящей в коэффициент  $B$ , также можно пренебречь.

Отбрасывая члены, вклад которых в величину соответствующих термических сопротивлений мал, и полагая, что слои между ПП и водой отсутствуют (см. рис. 9.1, б), получим

$$\Delta T = \frac{\frac{h}{2\kappa} DI_0(x, y)}{1 + \alpha_1 \frac{h}{\kappa}}. \quad (9.8)$$

В случае малых потерь тепла в воздух или малой толщины ПП [ $\alpha_1(h/\kappa) \ll 1$ ] выражение (9.8) можно записать в виде

$$\Delta T = \frac{h}{2\kappa} DI_0(x, y). \quad (9.9)$$

Выражения (9.3), (9.8) и (9.9) дают связь между распределением температур теплового поля, возникающего на поверхности ПП в результате диссипации УЗ в его материале, и распределением интенсивности УЗ по поперечному сечению пучка. Распределение температур  $\Delta T$  определяется из выражения (9.2)

как разность  $T_n(x, y) - T_0$ , где  $T_n(x, y)$  находится в ходе эксперимента непосредственно с ЖКП.

Коэффициент теплопередачи  $\alpha_1$  должен рассчитываться при температурном напоре  $T_0 - T_1$  и площади излучающей тепло поверхности, равной площади, занимаемой изображением. Расчет показывает, что при изменении температуры поверхности ЖКП от 15 до 31°C при температурном напоре 1°C и площади элемента изображения 1 мм<sup>2</sup> коэффициент  $\alpha_1$  равен 34 Вт/(м<sup>2</sup>·К). Если при тех же условиях  $T_0 - T_1 = 5^\circ\text{C}$ , то  $\alpha_1 = 40$  Вт/м<sup>2</sup>·К, т. е. в указанном диапазоне температур ЖКП  $\alpha_1$  не очень сильно зависит от температуры.

При эквивалентных акустических условиях приращения температуры в каждой точке изображения будут максимальны при термодинамических условиях, соответствующих формуле (9.9). Из нее можно найти величину

$$\gamma = \frac{\Delta T(x, y)}{T_0(x, y)} = \frac{h}{2\kappa} D = \gamma_m D, \quad (9.10)$$

которая численно равна приращению температуры пленки при интенсивности падающего УЗ пучка, равной единице, и выполнении условий  $\alpha \gg \alpha_1$ ,  $\alpha_1(h/\kappa) \ll 1$ . Коэффициент  $\gamma_m$ , входящий в выражение (9.10), может служить в качестве критерия при выборе материала ПП. При прочих равных условиях, чем больше  $\gamma_m$ , тем выше чувствительность ЖКД.

Для ЖКД, лежащего на границе раздела вода — воздух, величина статической температуры ЖКП может быть найдена из формулы (9.4), которая при  $\alpha_1(h/\kappa) \ll 1$  (электропроводный и защитный слои отсутствуют) принимает вид

$$T_0 = T + (T_1 - T) \alpha_1 \frac{h}{\kappa}. \quad (9.11)$$

Величину удельной мощности, вводимой в ЖКД для обеспечения заданного значения статической температуры, можно оценить при помощи выражения (9.7). После преобразований имеем

$$\Delta q = (T_n - T_0) \alpha_1 \left( 1 + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{h}{\kappa} \right). \quad (9.12)$$

Коэффициент  $\alpha_1$ , входящий в выражения (9.11) и (9.12), рассчитывается при температурном напоре  $T_n - T_1$  и площади излучения тепла, равной площади всего детектора.

Приведенные выше соотношения позволяют оценить основные параметры ЖКД при его разработке. Существующая неопределенность при определении коэффициентов теплопередачи  $\alpha$  и  $\alpha_1$ , как это показано в экспериментах с ЖКД (см. § 9.3), искажает результаты расчета незначительно.

Дальнейшим развитием работ по применению ЖК для визуализации акустических полей явились работы по визуализации

УЗ в газах [19, 68, 72]. Этот метод визуализации УЗ полей обладает некоторыми особенностями.

1. Отсутствие иммерсионной жидкости позволяет исследовать поля излучения ПКЭ, являющихся технологическими частями составных пьезопреобразователей, без загрязнения их поверхности.

2. Малое значение скорости звука и большое затухание его в воздухе (газах) по сравнению с жидкими средами позволяют изготавливать достаточно простые и компактные устройства визуализации.

3. При возбуждении пластинок в воздухе взаимные импедансы между их различными модами колебаний практически равны

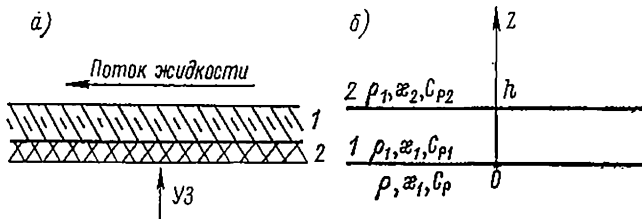


Рис. 9.2. Схема теплового расчета ЖК детектора.  
1 — ЖКП; 2 — стекло.

нулю [79, 120], т. е. форма колебаний пластинки на данной частоте будет определяться ее внутренними свойствами и результаты визуализации в каком-либо виде должны содержать информацию о них.

Процесс визуализации в газах происходит по схеме, аналогичной той, которая используется для визуализации УЗ в жидкостях (см. рис. 9.1). В общем случае ЖКД, предназначенный для работы в газах, представляет собой многослойную систему (см. § 9.3). Отличительной особенностью такого ЖКД является отсутствие ПП. Поглощение энергии УЗ поля, необходимое для срабатывания ЖКП, происходит в пограничном слое на границе раздела газ — ЖКП (рис. 9.2, а).

При отражении звуковой волны от твердой теплопроводной стенки происходит сильное поглощение звука [59, 60]. Можно дать следующее объяснение этому явлению. При взаимодействии акустической волны с твердой границей вблизи стенки имеется периодически изменяющаяся по величине разность температур между газом и стенкой, даже если средняя температура газа и стенки одинакова. Это приводит к возникновению в пограничном слое газа больших градиентов температур, что, в свою очередь, приводит к сильной диссипации акустической энергии путем теплопроводности. В случае наклонного падения волны по аналогичной причине — сильная диссипация звуковой энергии — происходит в пограничном слое за счет вязкости газа.

Рассмотрим связь между параметрами акустического поля и распределения температур, возникающего в ЖКП. Исходя из

термодинамических соображений [77] можно утверждать, что температура в каждой точке ЖКП будет пропорциональна величине локальных тепловых потоков, возникающих на границе раздела газ—ЖКП и идущих вдоль направления нормали к границе раздела из газа в стенку.

Если в результате взаимодействия акустической волны со стенкой УЗ поле на поверхности стенки характеризуется распределением интенсивности  $I_0(x, y)$ , где  $x, y$ —плоскость, совпадающая с границей раздела газ—ЖКП, то плотность потока тепла, протекающего через стенку за единицу времени, определится из выражения

$$\Delta I(x, y) = DI_0(x, y), \quad (9.13)$$

где  $D \neq$  коэффициент поглощения Константинова.

В соответствии с формулой (9.13) задача по определению параметров распределения теплового потока сводится к решению двух задач. Первая—расчет параметров УЗ поля непосредственно на границе газ—ЖКП. Эту задачу будем рассматривать в § 9.2. Вторая задача—определение коэффициента поглощения  $D$  на границе раздела газ—ЖКП, на которой сейчас остановимся.

Опираясь на метод Кирхгофа—Константинова [59, 60], получаем выражения для коэффициентов поглощения Константинова (отношение энергии акустической волны, диссипированной непосредственно в пограничном слое границы раздела, к энергии падающей волны) плоской волны на границе раздела двух жидких сред, характеризующихся произвольными физическими параметрами [69, 70].

Для границы раздела, на которой не наблюдается явление полного внутреннего отражения, или, если явление полного внутреннего отражения наблюдается для углов падения  $\theta$  от 0 до  $\theta_k$ , где  $\theta_k$ —угол полного внутреннего отражения, коэффициент поглощения Константинова (КПК) рассчитывается по формуле [70]

$$D = \frac{4Y}{(1+X)^2 + 2(1+X)Y + 2Y^2}, \quad (9.14)$$

$$X = \frac{\rho c \cos \theta_2}{\rho_2 c_2 \cos \theta}; \quad Y = \cos^{-1} \theta \left( b_{21} \frac{k_p}{k_B} \sin^2 \theta + \frac{k_c}{k_T} b_{11} \right);$$

$$k_p = \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_2} \right)^2; \quad k_B = 1 + \sqrt{\frac{\rho \eta}{\rho_2 \eta_2}}; \quad k_T = 1 + \sqrt{\frac{\rho C_p \kappa}{\rho_2 C_{p_2} \kappa_2}};$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}; \quad k_c = \left( 1 - \frac{C_p \rho \beta_2}{\rho_2 C_{p_2} \beta} \right)^2; \quad b_{21} = \sqrt{\frac{\omega \nu}{2c^2}};$$

$$b_{11} = (\gamma - 1) \sqrt{\frac{\omega a}{2c^2}}; \quad \cos \theta_2 = \sqrt{1 - \frac{c_2^2}{c^2} \sin^2 \theta};$$



$\rho$ ,  $c$  — плотность и скорость звука,  $\nu = \eta/\rho$  — кинематическая вязкость;  $\eta$  — динамическая вязкость;  $a = \kappa/\rho C_p$  — температуропроводность;  $\kappa$  — теплопроводность;  $C_p$ ,  $C_v$  — теплоемкость соответственно при постоянном давлении и объеме;  $\theta_2$  — угол преломления;  $\omega = 2\pi f$  — круговая частота;  $f$  — частота волн. Параметры среды, из которой волна падает на границу раздела, записаны без индексов, а параметры второй среды с индексом «2».

В случае когда наблюдается полное внутреннее отражение волны от границы, для  $\theta > \theta_k$  КПК можно найти из выражения

$$D_3 = \frac{4Y}{(1+Y)^2 + (X_3 - Y)^2}, \quad (9.15)$$

где  $X_3 = \rho c \sqrt{\frac{c_2^2}{c^2} \sin^2 \theta - 1} / (\rho_2 c_2 \cos \theta)$ .

Исследование функции (9.15) на экстремум (полагая  $\sin^2 \theta = 1$ ) показало, что  $D_3$  имеет максимум в том случае, когда

$$\cos \theta_m = B_m \sqrt{1 - 2Q + 2Q^2}, \quad (9.16)$$

где  $Q = A_m/B_m$ ;  $A_m = b_{21}(k_\rho/k_B) + (k_c/k_x) b_{11}$ ;  $B_m = \rho c \sqrt{(c_2^2/c^2) - 1} / \rho_2 c_2$ .

Из формулы (9.16) нетрудно найти значение угла падения  $\theta_m$ , при котором наблюдается максимум поглощения

$$\theta_m = \frac{\pi}{2} - B_m \sqrt{1 - 2Q + 2Q^2}. \quad (9.17)$$

Выражение для расчета максимального значения КПК нетрудно получить, подставив в (9.15) выражение (9.16). После преобразований имеем

$$D_m = \frac{2Q}{\sqrt{1 - 2Q + 2Q^2} + Q}. \quad (9.18)$$

В предельных случаях из формулы (9.18) получаем на низких частотах

$$D_m \simeq 2 \frac{A_m}{B_m} = 2Q, \quad (9.19)$$

на высоких частотах

$$D \simeq \frac{2}{\sqrt{2} \sqrt{Q+1} + 1}. \quad (9.20)$$

Если  $Q \ll 1$ , то из (9.20) имеем  $D_m = 0,8284$  независимо от физических свойств контактирующих сред. Этот результат был получен Б. П. Константиновым [59, 60].

Выражение для максимального значения КПК (9.18) имеет максимум  $D_m = 1$ , если выполняется равенство  $A_m = B_m$ . Используя его, нетрудно найти значение частоты, на которой мак-

симальное значение КПК равно единице:

$$f_{кр} = \frac{c^2 \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_2} \right)^2 - \left( \frac{\rho c}{\rho_2 c_2} \right)^2 \right]}{\pi \left( \sqrt{\nu} \frac{k_p}{k_b} + \sqrt{a} \frac{k_c}{k_t} (\gamma - 1) \right)^2}. \quad (9.21)$$

Рассмотрим теперь формулы (9.14)–(9.21) применительно к визуализации УЗ в газах. Пусть волна, возбужденная в газе, взаимодействует с границей раздела газ — твердое тело.

Сопоставление физических параметров любых газов и твердых тел [109] показало (табл. 9.1), что с большой степенью

Таблица 9.1 Физические свойства сред [105]

Среда	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$c$ , м/с	$\rho c$ , кг/(м <sup>2</sup> ·с)	$C_p$ , Дж/(кг·К)	$\frac{C_p}{C_V}$ $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$	$\kappa \cdot 10^3$ , Вт/(м <sup>2</sup> ·К)	$\alpha \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с	$\eta \cdot 10^3$ , Па·с	$\nu \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с	$\Delta c / \Delta t$ , м/(с·К)
Воздух	1,293	331	428	1007	1,402	2,41	2,59	1720	1330	0,6
Углекислый газ	1,977	257	508	848	1,293	1,45	1,14	1367	691	0,4
Аргон	1,784	319	569	522	1,670	1,64	1,76	2090	1772	0,56
Жидкокристаллическая пленка	1150–1350	1600–2900	$(2,2 \div 3,3) \cdot 10^6$	1560	—	30	0,02	—	—	—
Стекло	2407	5000	$12,0 \cdot 10^6$	670	—	75	0,05	—	—	—

Примечания. 1. Параметры газов даны при  $T_0 = 273$  К и давлении  $p_0 = 1,01 \cdot 10^5$  Па = 1 ат. 2. Параметры ЖКП для пленок на основе поливинилового спирта.

точности коэффициенты, входящие в (9.15)–(9.21), принимают следующие значения:  $k_p = 1$ ;  $k_b = 1$ ;  $k_t = 1$ ;  $k_c = 1$ . Кроме того, для  $\theta < 90^\circ$  всегда  $X \ll 1$ , а величина  $Y$  определяется из выражения

$$Y = \cos^{-1} \theta (b_{21} \sin^2 \theta + b_{11}). \quad (9.22)$$

Как видим, в выражение (9.22) входят только параметры газа. Воспользовавшись формулой  $c^2 = \gamma p_0 / \rho$ , где  $p_0$  = статическое давление газа, выражение (9.22) представим в виде

$$Y = \cos^{-1} \theta \left[ \sqrt{\frac{\pi \eta}{\gamma}} \sin^2 \theta + (\gamma - 1) \sqrt{\frac{\pi \kappa}{\gamma C_p}} \right] \sqrt{\frac{f}{p_0}}. \quad (9.23)$$

Из (9.23) нетрудно видеть, что абсолютное значение  $Y$  может изменяться в зависимости от статического давления  $p_0$ . Законы изменения параметров, входящих в (9.23), от температуры можно найти в [109]. Но, как показывают расчеты, абсолютные значения  $Y$  мало меняются при изменении температуры среды от 0 до 50 °С.

О порядке величин, входящих в выражение (9.23), можно судить из табл. 9.1, в которой представлены параметры газов, широко используемых в судостроительной промышленности. Для сопоставления в табл. 9.1 приведены также параметры ЖКП и стекла, которое обычно используется как несущая конструкция (см. рис. 9.2) при изготовлении ЖКД. Результаты расчета абсолютного значения  $Y$  для двух температур представлены в табл. 9.2. Сопоставляя данные таблицы, можно прийти к следующим выводам. Все газы имеют в эквивалентных условиях одинаковый порядок величины  $Y$ . Вклад вязкости в диссипацию энергии практически одинаков для всех газов. Диссипация энергии за счет теплопроводности больше у тех газов, которые имеют большее значение произведения  $(\gamma - 1)a$ . При статическом давлении  $p_0 = 1 \text{ атм} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$  во всем, наиболее интересном с точки зрения визуализации УЗ полей диапазоне частот от 10 кГц до 10 МГц абсолютное значение  $Y \ll 1$ , если  $\theta < 90^\circ$ .

Таблица 9.2 Абсолютное значение  $10^3 \cdot Y \cos \theta$

Газ	0 °С	20 °С
Воздух	$2,94 + 6,21 \sin^2 \theta$	$2,99 + 6,37 \sin^2 \theta$
Углекислый газ	$1,89 + 5,77 \sin^2 \theta$	$1,92 + 5,96 \sin^2 \theta$
Аргон	$5,15 + 6,29 \sin^2 \theta$	$5,24 + 6,48 \sin^2 \theta$

При взаимодействии УЗ волны с твердыми стенками, характеризующимися такими физическими свойствами, как у ЖКП и стекла (см. табл. 9.1), должно наблюдаться явление полного внутреннего отражения волны. Величины критических углов падения  $\theta_k$  и другие соотношения, входящие в расчетные формулы, представлены в табл. 9.3.

Таблица 9.3 Основные параметры границ раздела

Граница	$\rho c / (\rho_2 c_2)$	$\theta_k$ , град	$B_m$	$A_m$	$A_m/B_m$	$A_m^2/B_m^2$
I	$1,3 \cdot 10^{-4}$	8,5	$8,7 \cdot 10^{-4}$	$2,9 \cdot 10^{-5}$	$3,3 \cdot 10^{-2}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$
II	$2,8 \cdot 10^{-5}$	3,8	$5,4 \cdot 10^{-4}$	$2,9 \cdot 10^{-5}$	$5,4 \cdot 10^{-2}$	$2,9 \cdot 10^{-3}$

Примечание. I — воздух — ЖКП; II — воздух — стекло.

Опираясь на проведенный выше анализ величин постоянных коэффициентов и данные табл. 9.3, приходим к выводу, что во всем диапазоне частот при углах от 0 до  $\theta_k$  расчет КПК нужно производить по формуле (9.14), представив его в виде

$$D = 4Y. \quad (9.24)$$

Если  $\theta > \theta_k$ , то для расчета КПК необходимо использовать выражение (9.15), причем какое-либо упрощение этой формулы нужно производить осторожно. На частотах более 700 кГц в диапазоне углов падения от  $\theta_k$  до  $\theta_m$  формула (9.15) может быть заменена выражением

$$D_3 = \frac{4Y}{1 + 2Y + 2Y^2}. \quad (9.25)$$

Выражение (9.25) представляет собой известную формулу Константина [59, 60].

На основании выражения (9.13), если известны формулы для расчета КПК и распределение параметров поля  $J_0(x, y)$  на границе раздела газ — ЖКП, можно определить величину плотности теплового потока  $\Delta J(x, y)$ , протекающего через стенку в каждой точке границы. Это позволяет установить связь между параметрами УЗ поля и параметрами температурного поля в ЖКП.

Обычно при визуализации УЗ в газах ЖКП наносятся на стеклянные пластины (см. рис. 9.2, а), которые одновременно играют роль несущих конструкций и теплоотводящих элементов. Теплоотвод необходим для стабилизации изображения (параметров температурного поля в ЖКП) и осуществляется за счет протекания жидкости по поверхности стеклянной пластины, противоположной той, на которую нанесена ЖКП.

Анализ теплового режима работы ЖК визуализаторов УЗ полей показывает, что с термодинамической точки зрения мы имеем задачу нахождения распределения температуры (вдоль оси  $z$ , рис. 9.2, б) в ограниченном теле (ЖКП), приведенном в соприкосновении с полуограниченным телом (стекло с омывающей его жидкостью). В начальный момент времени к свободной стороне ЖКП ( $z = 0$ ) подводится тепловой поток с плотностью  $\Delta J(x, y)$ , который затем поддерживается постоянным на протяжении всего процесса. В исходном состоянии температура всех сред одинакова. Кроме того, выполняются условия

$$h_n \ll \sqrt{S}; \quad h_c \ll \sqrt{S}; \quad h_n \ll h_c, \quad (9.26)$$

где  $h_n, h_c$  — толщины ЖКП и стеклянной пластины соответственно;  $S$  — площадь ЖКД.

Неравенства (9.26) вытекают из требования отсутствия растекания тепла в направлениях, перпендикулярных оси  $Oz$  (см. рис. 9.2, б).

В общем виде распределение температур вдоль оси  $z$  при условиях, оговоренных выше, нашел Лыков [77]. Применительно к нашему случаю оно имеет вид

$$\Delta T = T(z, t) - T_0 = \frac{\Delta J(x, y)}{\alpha} \left\{ 2 \sqrt{\frac{at}{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4at}} - \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right) \right\}. \quad (9.27)$$

где  $\operatorname{erfc}(z/2\sqrt{at}) = 1 - \operatorname{erf}(z/2\sqrt{at})$ ;  $\operatorname{erf}(z/2\sqrt{at})$  — функция ошибок [77];  $T_0$  — начальная температура сред.

Из неравенства (9.26) следует, что основную массу стенки обеспечивает стеклянная пластина. Следовательно, для расчета формулы (9.27) могут быть взяты термофизические параметры стекла (см. табл. 9.1).

При изготовлении ЖКП максимальная концентрация активного вещества (смесь эфиров холестерина) оказывается в центре пленки. По этой причине в формуле (9.27) величина  $z = h/2$ .

Из выражения (9.27) видно, что с ростом  $t$  величина  $\Delta T$  непрерывно возрастает, но в реальных условиях бесконечного увеличения  $\Delta T$  не происходит, так как при разогреве ЖКП начинает терять часть своего тепла в окружающие ее среды. Пренебрегая потерями тепла в газ, считаем, что основной поток тепла из ЖКП уходит через стеклянную пластину в омывающую ее жидкость (см. рис. 9.2, а). Условием стабилизации температуры поля ЖКП является равенство тепловых потоков, один из которых возникает в результате диссипации акустической энергии на границе газ — ЖКП, а другой выходит из стеклянной пластины в жидкость.

Наличие конечной толщины у несущей стеклянной пластинки приводит к тому, что момент возникновения теплового потока, идущего в жидкость, опаздывает относительно момента включения УЗ поля на время

$$t_a \simeq \frac{h_c^2}{4a}, \quad (9.28)$$

где  $a$  — температуропроводность стекла.

Учитывая возможный диапазон изменения толщины ЖКП, свойства функции  $\operatorname{erfc}x$  и неравенства (9.26), из формулы (9.27) можно найти величину максимума температуры ЖКП

$$\Delta T_m = \frac{0,56h_c \Delta I(x, y)}{\kappa} = \frac{0,56h_c D I_0(x, y)}{\kappa}. \quad (9.29)$$

Из (9.29) нетрудно получить выражение для чувствительности ЖКД

$$\gamma_r = \gamma_c D = \frac{\Delta T_m(x, y)}{I_0(x, y)}. \quad (9.30)$$

Величина  $\gamma_c = 0,56h_c/\kappa$  может служить в качестве критерия при выборе материала несущей стенки, т. е. при прочих равных условиях для повышения чувствительности нужно брать среду с меньшей величиной коэффициента теплопроводности. Увеличивать  $h_c$  невыгодно, так как в соответствии с выражением (9.28) это увеличивает его инерционность.

ЖКП могут быть также использованы для определения пределений поля температур и механического динамического напряжения, возникающих в пьезоэлементах при их возбужде-

нии. Методика использования пастообразных ЖК холестериче-ского типа для визуализации тепловых полей ПКЭ не отличается от известных контактных методов исследования тепловых полей различного происхождения в твердых телах и изложена в [1].

Применение ЖКП для термографирования поверхности ПКЭ существенно упрощает эту операцию по сравнению с другими методами. Возможность многократного использования, большой срок сохранности ЖКП — вот основные преимущества ЖКП по сравнению с пастообразными ЖК. Использование ЖКП для термографирования исключает также необходимость специальной подготовки поверхности исследуемого образца.

Визуализация теплового поля при помощи ЖКП происходит по схеме, представленной на рис. 9.3. На поверхность исследуе-

Рис. 9.3. Схема использования ЖКП для визуализации теплового поля пьезоэлемента.

1 — ЖКП; 2 — контактная жидкость; 3 — исследуемый ПКЭ; 4 — воздушный зазор; 5 — подставка.



мого пьезоэлемента посредством контактной жидкости приклеивается ЖКП. При возбуждении ПКЭ происходит ее разогрев, на который ЖКП отвечает изменением цвета.

Подводимая к ПКЭ электрическая мощность может быть представлена в виде суммы слагаемых  $P = P_A + P_M + P_E$ , где  $P_A$  — мощность акустического излучения;  $P_M$  — мощность механических потерь,  $P_E$  — мощность диэлектрических потерь.

При работе ПКЭ в воздухе добавкой  $P_A$  обычно пренебрегают. Для большинства пьезокерамических материалов отношение  $P_M/P_E > 100$ , т. е. основной вклад в разогрев пьезокерамики при прочих равных условиях вносят механические потери [117].

В пластине конечных размеров за счет отражения обертонов от боковых поверхностей возникают ангармонические моды, накладывающиеся на основную моду колебаний по толщине. Это приводит к появлению распределения амплитуд колебаний по поверхности образца, отличающегося от распределения, характерного для поршневых колебаний. В зонах с большими значениями амплитуды колебаний механические потери соответственно возрастают и распределение температур на поверхности ПКЭ не будет равномерным, причем между параметрами температурного поля и распределением амплитуд колебаний поверхности наблюдается корреляция [37].

При выполнении идентичных условий возбуждения и крепления ПКЭ распределение участков на поверхности образца, в которых происходит увеличение или уменьшение амплитуд колебаний, зависит от однородности физико-механических свойств его материала, а также от его формы и геометрических разме-

ров. Если при производстве ПКЭ хорошо выдерживаются форма, геометрические размеры и однородность материала, то распределение амплитуд колебаний по поверхности образца близко к некоторому стандартному распределению, характерному для всех образцов.

Наличие дефектов в ПКЭ или отклонения физико-химических свойств его материала приводят к соответствующим изменениям в распределении амплитуд колебаний по поверхности образца по сравнению со стандартным распределением. К изменениям в распределении могут приводить даже локальные изменения свойств пьезокерамики, которые не обнаруживаются существующими электрофизическими методами неразрушающего контроля, т. е. параметры, контролируемые в этих случаях, характеризуют ПКЭ как единую электромеханическую систему. В этом смысле термографирование поверхности возбужденных ПКЭ может выступать как метод неразрушающего контроля ПКЭ [36, 37].

Точное решение задачи о поле температур возбужденного ПКЭ сопряжено с большими математическими и техническими трудностями. По этой причине теоретические аспекты данной задачи здесь не рассматриваются. Можно считать, что в настоящее время методы термографирования поверхности ПКЭ являются единственными источниками информации об их тепловых режимах и распределениях механического динамического напряжения внутри образца.

## § 9.2. Акустические поля пьезокерамических преобразователей

Общие методы расчета параметров акустических полей, создаваемых излучателями произвольной формы, изложены, например, Скучиком [105]. Примеры расчета акустических полей излучателей простой формы в бесконечных экранах и без них представлены в [105, 111]. Со структурой акустических полей некоторых реальных объектов, полученных методами визуализации УЗ полей, можно также познакомиться в [114, 119].

В соответствии со схемой визуализации УЗ в газах (рис. 9.4, а) акустическое поле, создаваемое возбужденным ПКЭ, ограничено областью между двумя экранами ( $l = b$ ). По этой причине параметры созданного акустического поля во всем объеме ограниченного пространства (в том числе и на границе раздела газ — ЖКП) должны отличаться от параметров поля, излучаемого ПКЭ в свободное пространство. Следовательно, для того чтобы иметь возможность сопоставлять результаты визуализации УЗ полей ПКЭ, необходимо найти связь между параметрами распределения колебательных скоростей поверхности ПКЭ и параметрами акустического поля на границе газ — ЖКП.

Физические свойства ЖКП, несущей стенки и экрана, в который помещен ПКЭ такие, что по отношению к любому газу

их можно считать абсолютно жесткими. На УЗ частотах поглощение волн настолько велико, что даже для верхнего и нижнего экранов конечных размеров выполняются граничные условия, типичные для системы двух бесконечных экранов, в один из которых вмонтирован излучатель.

Анализ показал, что выражение, позволяющее найти значения параметров акустического поля в любой точке между экранами, может быть получено, если  $l = b$  (рис. 9.4, а), т. е. когда плоскость поверхности ПКЭ совпадает с плоскостью экрана.

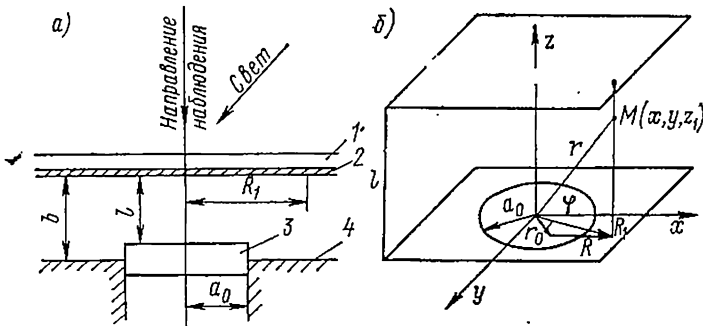


Рис. 9.4. Схема визуализации УЗ поля ПКЭ в газах.  
1 — несущая прозрачная пластина; 2 — ЖКП; 3 — исследуемый ПКЭ; 4 — жесткий экран.

В случае, когда  $l \neq b$ , решение задачи наталкивается на большие математические трудности.

Рассмотрим задачу об определении поля потенциала скорости  $\Phi (v = \text{grad } \Phi)$  в пространстве между двумя параллельными пластинами (рис. 9.4, б). В нижней пластине находится круглый (радиусом  $a_0$ ) плоский источник УЗ, колеблющийся по гармоническому закону. Распределение колебательных скоростей поверхности излучателя, обладающего аксиальной симметрией, считается заданным. Задача решается в акустическом приближении. Решение ее может быть найдено методом функции Грина [18, 74, 120] в виде

$$\hat{\Phi}(r_1) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_0} \frac{\partial \hat{\Phi}(r_0)}{\partial n} G(r_1, r_0) dS_0, \quad (9.31)$$

где  $G(r_1, r_0)$  — функция Грина для плоского слоя с абсолютно жесткими стенками может быть записана в виде ряда [120]

$$G(r_1, r_0) = \frac{\pi i}{z} \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon_N \cos \frac{\pi N z_1}{z} H_0^{(1)}(k_N R).$$

$$\varepsilon_N = \begin{cases} 1, & \text{при } N=0; \\ 2, & \text{при } N>0; \end{cases} \quad k_N = \sqrt{1 - \left(\frac{\pi N}{kz}\right)^2};$$

$$R = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 - (y_1 - y_0)^2};$$



$N = 0, 1, 2, 3, \dots$ ;  $k = \omega/c$  — волновое число;  $c$  — скорость звука в газе;  $i$  — мнимая единица;  $H_0^{(1)}(k_N R)$  — функция Ханкеля первого рода с нулевым индексом  $k_N R = k_N a_0 \times \sqrt{\bar{r}_0^2 + \bar{R}_1^2 - 2\bar{r}_0 \bar{R}_1 \cos \varphi}$ ,  $R$ ,  $r_0$  и  $R_1$  (см. рис. 9.4, б) связаны соотношением

$$R^2 = r_0^2 + R_1^2 - 2r_0 R_1 \cos \varphi,$$

где  $\varphi$  — азимутальный угол в цилиндрической системе координат  $r_0, z, \varphi$ .

Из (9.31) после преобразований получим выражение для модуля безразмерного потенциала скорости

$$|\Phi_0(\bar{r}_1)| = \left| \frac{4z\hat{\Phi}(r_1)}{a_0^2 \hat{v}_{nm}^2} \right|; \quad (9.32)$$

$$|\Phi_0(\bar{r}_1)| = \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon_N \cos N\pi\bar{z} \int_0^{2\pi} \int_0^1 |\bar{\vartheta}_n(r_0) H_0^{(1)}(k_N R)| \bar{r}_0 d\bar{r}_0 d\varphi,$$

где  $\bar{z} = z_1/z$ ,  $r_0 = r_0/a_0$ ,  $\bar{R}_1 = R_1/a_0$ ,  $\bar{\vartheta}_n = v_n/v_{nm}$ ;  $v_{nm}$  — максимальное значение колебательной скорости в распределении на поверхности источника УЗ. Распределение модуля потенциала скорости вдоль верхней стенки (см. рис. 9.4, б) можно получить, положив в (9.32)  $\bar{z}_1 = 1$ ,  $z = l$ . Из (9.32) видно, что в задаче имеются два независимых безразмерных параметра, а именно  $ka_0$  и  $kl$ . Заданием этих параметров распределение безразмерного модуля потенциала скорости  $|\Phi_0|$  определяется однозначно. Кроме того, имеется размерный параметр  $a_0/\hat{v}_{nm}$ . Задание всех трех параметров полностью определяет распределение размерного модуля потенциала скорости  $|\hat{\Phi}_0|$ .

Результаты расчета распределения модуля безразмерного потенциала  $|\Phi_0(\bar{R}_1)|$  вдоль границы раздела газ — ЖКП, полученные при помощи формулы (9.32), представлены на рис. 9.5. Кривые на рисунке соответствуют распределениям  $|\Phi_0(\bar{R}_1)|$ , полученным для различных расстояний  $kl$  от поверхности источника УЗ до ЖКП, причем левая часть каждого графика, обозначенная цифрой I, рассчитана для излучателя с распределением амплитуд колебаний, представленным на рис. 9.6, а, правая часть, обозначенная II, рассчитана для поршневого излучателя с амплитудой колебаний поверхности, равной 1,8 мкм. Волновые размеры обоих излучателей одинаковы  $ka_0 = 11,4$ .

Результаты расчета показывают, что распределение безразмерного потенциала  $|\Phi_0(\bar{R}_1)|$  для излучателей с различными распределениями амплитуд колебаний поверхности ( $ka_0$  одинаковы) сильно отличаются друг от друга как по форме распределения, так и по величине значений  $|\Phi_0(\bar{R}_1)|$ . Это позволяет сделать вывод, что при наличии прибора, на котором осуществляется объективное сопоставление изображений, могут быть обнаружены отличия в распределениях  $|\Phi_0(\bar{R}_1)|$  излучателей УЗ,

имеющих различия в распределениях амплитуд колебаний их поверхностей. Кроме того, расчеты показывают, что чем меньше волновой размер  $ka_0$ , тем меньше характерных особенностей

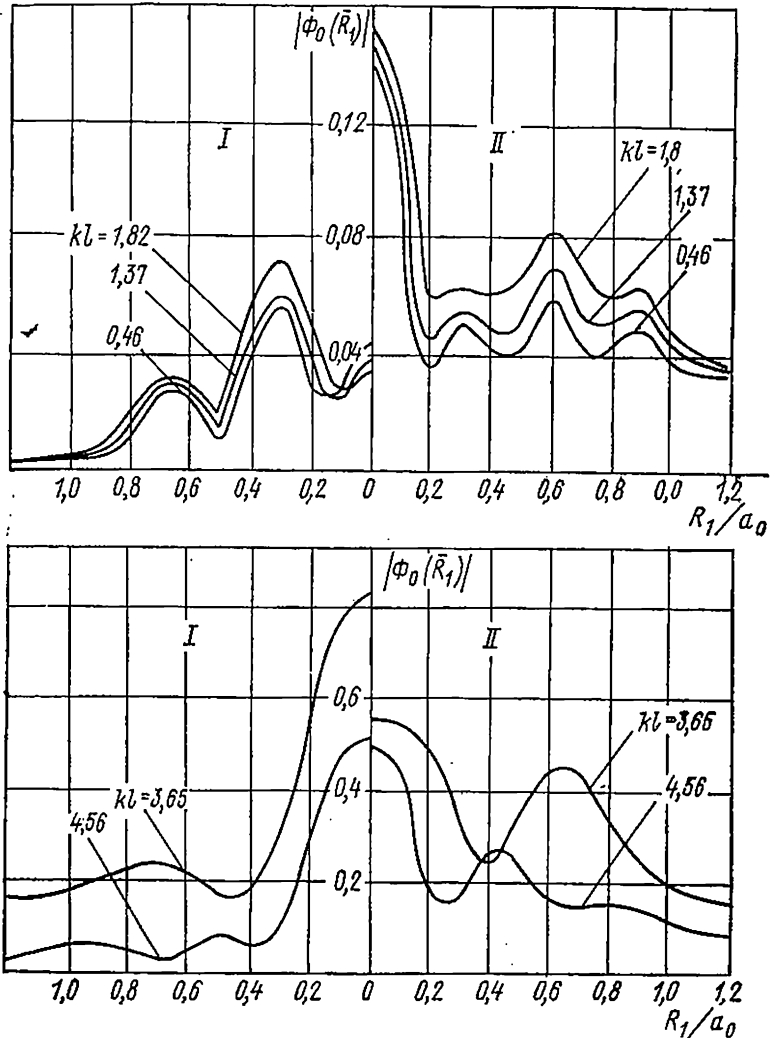


Рис. 9.5. Распределение модуля безразмерного потенциала скорости на границе раздела газ — ЖКП для ПКЭ с  $ka_0 = 11,4$  при различных значениях безразмерного расстояния  $kl$ .  
 I — экспериментальное распределение амплитуд колебаний поверхности (см. рис. 9.6); II — жесткий поршень (амплитуда колебаний 1,8 мкм).

имеет изображение. В нем обычно наблюдается максимум в центре и монотонный спад  $|\Phi_0(\bar{R}_1)|$  по мере увеличения  $\bar{R}_1$ . В этом случае различной оказывается только крутизна спада кривой  $|\Phi_0(\bar{R}_1)|$ . При визуальном наблюдении какие-либо отли-

чия в распределениях  $|\Phi_0(\bar{R}_1)|$ , получаемых с ЖКП для излучателей с малыми значениями  $ka_0$ , обнаружить трудно. Источники УЗ с большими значениями  $ka_0$  ( $ka_0 \gg 11,4$ ) при малых значениях  $kl$  ( $kl \leq 2$ ) имеют характерную кольцевую структуру распределения  $|\Phi_0(\bar{R}_1)|$ , которая по мере увеличения  $kl$  теряет свои особенности, превращаясь в монотонно уменьшающуюся с ростом  $R_1$  функцию (см. рис. 9.5).

Из рис. 9.5 также видно, что основная часть стационарного акустического поля, созданного источником УЗ в слое, ограниченном жесткими стенками (см. рис. 9.4), оказывается сконцентрированной в цилиндрическом объеме, нижнее основание которого имеет радиус, примерно равный радиусу излучателя. Такая особенность УЗ поля позволяет при необходимости не только обнаружить источник УЗ, но и определить его приблизительные размеры [68, 74].

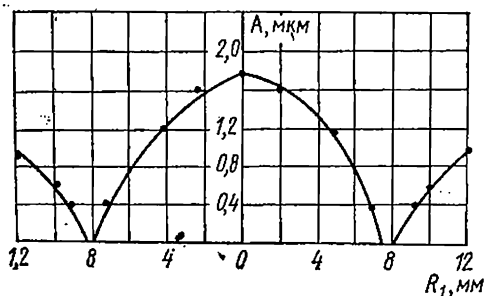


Рис. 9.6. Распределение амплитуд колебаний поверхности источника УЗ.

Количественные соотношения, характеризующие УЗ поле на границе раздела газ — ЖКП, можно получить исходя из известного выражения, связывающего звуковое давление и потенциал

$$p = \rho \frac{\partial \Phi(R_1, t)}{\partial t} \quad (9.33)$$

Используя в (9.33) формулу (9.32), вещественная часть амплитуды давления на границе раздела газ — ЖКП ( $z = l$ ) может быть выражена через безразмерные параметры в виде

$$p = \rho c |\Phi_0(\bar{R}_1)| \frac{(ka_0)^2}{4kl} \hat{v}_{nm} \quad (9.34)$$

Все параметры, входящие в (9.34), могут быть получены с кривых, аналогичных тем, которые представлены на рис. 9.5. Максимальное значение амплитуды распределения колебательных скоростей поверхности излучателя УЗ  $\hat{v}_{nm}$  должно быть задано или определено экспериментально из распределения амплитуд колебаний поверхности ПКЭ.

Если предположить, что в данном случае справедливо соотношение между звуковым давлением и интенсивностью, имеющее место для плоской волны, тогда выражение интенсивности

на границе раздела газ — ЖКП принимает вид

$$J(\bar{R}_1) = \frac{\rho c |\Phi(\bar{R}_1)|^2 (ka_0)^4 \hat{\sigma}_{nm}^2}{32 (kl)^2}. \quad (9.35)$$

Совместное использование выражений (9.34) и (9.27) позволяет найти распределение плотности теплового потока, идущего на разогрев ЖКП при визуализации УЗ в газах.

Исходя из схемы визуализации УЗ полей ПКЭ (см. рис. 9.4, а) наиболее просто реализуется ситуация, когда ПКЭ лежит на поверхности экрана. В этом случае толщина слоя  $b$  уже не равна расстоянию  $l$  от поверхности ПКЭ до ЖКП.

Анализируя ситуацию с точки зрения волноводного распространения звука, можно утверждать, что на скачке поперечного сечения канала наблюдается частичное отражение цилиндрических волн, идущих из центральной части ПКЭ. Наличие прямой и отраженной волн, приводит к тому, что на стационарное распределение УЗ поля, возникшее в воздушном промежутке между верхней поверхностью ПКЭ и ЖКП, накладывается стоячая цилиндрическая волна, т. е. для получения истинной картины распределения параметров УЗ поля при визуализации в газах необходимым условием является обеспечение достаточно протяженного экрана, в который помещается исследуемый ПКЭ.

### § 9.3. Устройства для визуализации ультразвуковых и тепловых полей ПКЭ

Структурная схема устройства для визуализации УЗ полей пьезопреобразователей в жидкости показана на рис. 9.7. Согласно этой схеме исследуемый преобразователь П устанавливается на дне бака так, чтобы основная часть излученной им УЗ энергии падала в направлении нормали на границу раздела жидкость — газ. Плоскость ЖКД обычно параллельна излучающей поверхности, а сам ЖКД может занимать произвольное положение между излучающей поверхностью и границей раздела жидкость — воздух.

Для обеспечения работы установки визуализации УЗ необходимо иметь набор стандартных приборов (см. рис. 9.7).

Возбуждение пьезопреобразователя производится при помощи генератора, параметры которого подбираются в зависимости от параметров исследуемого излучателя УЗ. Контроль режима возбуждения обеспечивается вольтметром и частотомером. Перемещение ЖКД в вертикальной плоскости производится при помощи механизма вертикального перемещения, который должен иметь шкалу для отсчета расстояния между излучающей поверхностью и нижней плоскостью ЖКД. Для обеспечения заданного температурного режима и стабилизации изображения УЗ поля в состав установки вводится термостабилизирующее устройство. Подсветка изображения УЗ поля производится при помощи источника света, основными требованиями

к которому являются обеспечение равномерной освещенности верхней поверхности ЖКД и возможность оптического согласования с соответствующим устройством отображения информации.

В качестве устройств отображения информации используются различные кино- и фотокамеры. Не исключается также визуальное наблюдение. Если изображение УЗ поля имеет малый масштаб, то оно может быть увеличено при помощи промышленной телевизионной установки.

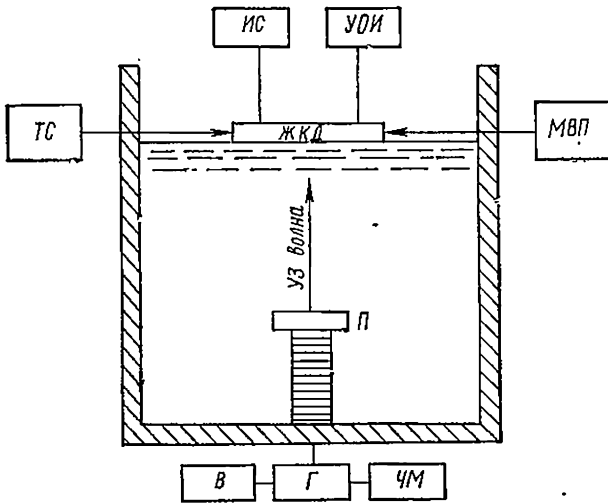


Рис. 9.7. Структурная схема визуализации УЗ поля в жидкости. П — исследуемый источник УЗ; Г — генератор; В — вольтметр; ЧМ — частотомер; ЖКД — жидкокристаллический детектор; ТС — термостатирующее устройство; МВП — механизм вертикального перемещения; ИС — источник света; УОИ — устройство отображения информации.

Единственным элементом, который необходимо изготавливать в лаборатории, является жидкокристаллический детектор. По этой причине на его устройстве остановимся более подробно.

На рис. 9.1 показаны примеры исполнения ЖКД, предназначенных для визуализации УЗ на границе раздела жидкость — воздух. В детекторе жидкокристаллическая пленка посредством контактной жидкости нанесена на пластину-поглотитель ультразвука. На нижней поверхности нанесен электропроводный слой, который от жидкости защищен покрытием.

В качестве контактной жидкости выбирается какая-либо жидкость, нейтральная по отношению к слоям, между которыми обеспечивается тепловой и акустический контакт. Контактные жидкости должны обладать большим коэффициентом затухания

УЗ, малым коэффициентом теплопроводности и низкой температурой затвердевания. Этим требованиям хорошо удовлетворяют касторовое масло, глицерин и др. Толщина слоя контактной жидкости обычно составляет 10—20 мкм.

Электропроводный слой предназначен для подогрева ЖКД до заданной температуры, чтобы обеспечить его высокую чувствительность. В качестве материала этого слоя необходимо выбрать вещество, обладающее высоким удельным электрическим сопротивлением и малым коэффициентом теплопроводности.

Защитный слой предохраняет электропроводный слой от воздействия на него жидкой среды и обеспечивает термическое сопротивление достаточной величины для удержания тепла в ЖКД. В качестве материалов для защитного слоя могут быть выбраны вещества, обладающие: малым коэффициентом теплопроводности, большим затуханием УЗ и удельным акустическим сопротивлением, близким к удельному сопротивлению ПП или жидкости.

Материал пластины поглотителя ЖКД должен удовлетворять следующим требованиям: не растворяться в иммерсионной жидкости, иметь акустические свойства, близкие к свойствам жидкости, обладать высоким коэффициентом поглощения УЗ, характеризоваться малыми значениями теплопроводности и теплоемкости. Наиболее полно этим требованиям удовлетворяют полимерные материалы. В табл. 9.4 приведены свойства материалов, используемых для изготовления ПП.

Таблица 9.4 Свойства материалов для пластин поглотителей [105]

Материал	Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	Скорость звука $c$ , м/с	Теплоемкость, Дж/(кг·К)	Теплопроводность, Вт/(м·К)	Температуропроводность, м <sup>2</sup> /с	Коэффициент затухания на частоте 1,2 МГц, Нп/м
Оргстекло	1189	2820	$1,73 \cdot 10^3$	0,181	$8,9 \cdot 10^{-8}$	24
Полистирол	1060	2670	$1,34 \cdot 10^3$	0,082	$5,8 \cdot 10^{-8}$	10,5
Эпоксидная смола ЭД-5 с 30%-РЬО	1370	2050	—	—	—	48

ПП, кроме выполнения своей основной задачи (поглощение УЗ), обеспечивает общую механическую прочность ЖКД. Из условия отсутствия растекания тепла вдоль ПП толщина материалов, обычно применяемых в качестве поглотителей (см. табл. 9.4), не должна превышать 4 мм. По этой причине механическая прочность ЖКД невысока и ее можно использовать для визуализации на границе жидкость — газ и при малых гидростатических давлениях.

Температурная чувствительность ЖКП определяется температурным интервалом существования холестерической мезофазы,

который может быть весьма узким ( $T_b - T_n \geq 0,1^\circ\text{C}$ ). При изменении температуры в этом интервале цвет ЖК слоя в отраженном свете изменяется от красного до фиолетового (рис. 9.8). По цвету слоя в данном месте можно непосредственно судить о локальной температуре.

Термочувствительные ЖКП холестерического типа изготавливаются на основе лавсана или поливинилового спирта. ЖКП на лавсановой основе имеет слоистую структуру, внешние слои которой выполнены из тонкой (5—6 мкм) лавсановой пленки,

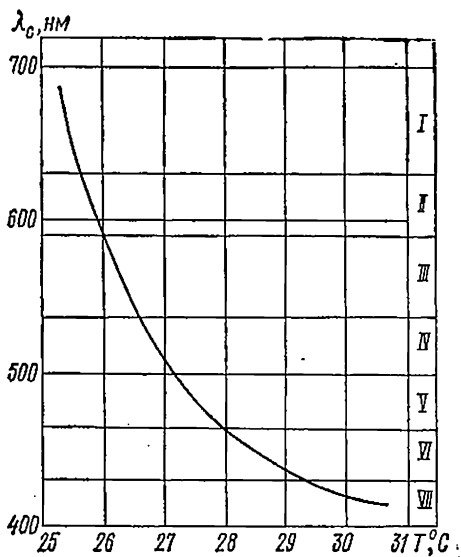


Рис. 9.8. Спектральная характеристика ЖКП.

Цифрами обозначены диапазоны длин волн отраженного света  $\lambda_c$ , воспринимаемых визуально как цвета.

I — красный; II — оранжевый; III — желтый; IV — зеленый; V — голубой; VI — синий; VII — фиолетовый.

а внутренний слой является активным слоем, представляющим собой подготовленную специальным образом композицию эфиров холестерина. Внешние слои обеспечивают ЖКП достаточную прочность и предохраняют ЖК слой от окисления, что увеличивает срок службы ЖКП до 1,5—2 лет (чистые ЖК сохраняют свои свойства на воздухе менее 7 сут.). На один из лавсановых слоев наносится слой черной краски. Это позволяет сделать цвета ЖКП в отраженном свете более контрастными. Рабочей стороной ЖКП, на которой наблюдается изображение УЗ поля, является неокрашенная сторона. ЖКП на основе поливинилового спирта (ПВС) имеют два внешних слоя, сделанных из ПВС, а внутренний слой состоит из смеси ПВС композиции эфиров холестерина. Одна сторона пленки также покрыта черной краской. ЖКП на основе ПВС растворяются в воде.

ЖКП, выпускаемые промышленностью, имеют параметры:

- 1) температура нижнего порога мезофазы  $T_n$  от 5 до  $80^\circ\text{C}$ ;
- 2) ширина диапазона мезофазы  $T_b - T_n$  от 0,1 до  $50^\circ\text{C}$ ;
- 3) оптическая активность порядка  $10^4$  град/см;

- 4) максимальный температурный сдвиг волны отраженного света при 300 К равен 1000 нм/К;
- 5) максимальное время изменения цвета 30 мс;
- 6) разрешающая способность не менее 10 пар линий на 1 мм;
- 7) температура размягчения 85 °С (для поливинилового спирта);
- 8) площадь  $h_n$  от 40 до 200 мкм;
- 9) площадь пленки может быть получена до 0,5 м<sup>2</sup>.

Параметры 3, 4, 5 и 6 — это параметры чистых холестерических ЖК [38, 39]. Величины  $T_n$  и  $T_v$  —  $T_n$  существенно зависят от композиции эфиров холестерина, входящей в состав среднего слоя пленки. Усредненные тепловые и акустические параметры ЖКП приведены в табл. 9.1.

Результаты опытной проверки ЖКД рассмотрим на примере детектора, состоящего из ПП с нанесенной на нее ЖКП. ЖКД помещался на границе раздела вода — воздух (см. рис. 9.1). УЗ падал нормально к поверхности ПП. Интенсивность УЗ научка контролировалась калиброванным сферическим зондом диаметром 1,5 мм. Теплообмен между свободной поверхностью ЖКП и воздухом осуществлялся посредством конвекции.

В качестве ПП использовались различные материалы, параметры некоторых из них представлены в табл. 9.4.

Ошибки в измерении температуры воды и воздуха не превышали 0,1 °С. Температура верхней поверхности ЖК пленки  $T_n$  определялась визуально при помощи ее спектральной характеристики по изменению цвета ЖКП в пятне диаметром 2 мм, центр которого совпадал с осью УЗ пучка. Абсолютные ошибки при измерении  $T_n$  составляли 0,2 °С, вблизи порога ЖК фазы 25,7 °С и 0,5 °С около верхней границы фазы 30,7 °С. Толщина пленки 150 мкм. Тепловой контакт между пленкой и ПП обеспечивался касторовым маслом.

По известным температурам  $T_n$  и  $T_0$ , используя выражение (9.2), нетрудно найти приращение температуры поверхности пленки  $\Delta T$ . Зная  $J_0$  и коэффициент поглощения ультразвука  $D$  из выражения (9.10), легко найти экспериментально величину коэффициента  $\gamma_m$ . Результаты эксперимента представлены в табл. 9.5 и на рис. 9.9. Горизонтальные прямые на рис. 9.9 соответствуют расчетным значениям  $\gamma_m$ , а точки — результатам измерений. В табл. 9.5 помещены следующие параметры:  $h$  — толщина ПП,  $f$  — частота источника УЗ;  $\lambda$  — длина УЗ волны

Т а б л и ц а 9.5 Параметры, при которых получены кривые на рис. 9.

Материал поглотителя	$h$ , мм	$f$ , кГц	$T_0$ , °С	$\lambda$ , мм	$\gamma_m \cdot 10^3$ , м <sup>2</sup> К/Вт	$D$
Оргстекло	2,85	965	25,2	2,95	7,9	0,321
Оргстекло	1,75	890	25,9	3,17	4,8	0,190
Полистирол	2,90	1140	23,0	2,34	17,7	0,123
Полистирол	1,85	980	26,2	2,72	11,3	0,041



В материале ПП,  $T_0$  — статическая температура ЖКП;  $\gamma_m$  — расчетные значения по (9.10).

Сопоставление результатов расчета и измерений (см. рис. 9.9) показывает, что в каждом случае можно выделить диапазон температур  $\Delta T$ , в котором результаты измерений достаточно близки к расчетным значениям  $\gamma_m$ . В указанном диапазоне температур сохраняется линейная зависимость между  $\Delta T$  и  $J_0$ . С ростом  $\Delta T$  эта пропорциональность нарушается за счет нелинейного возрастания величины коэффициента теплопередачи в воздух  $\alpha_1$  и растекания тепла вдоль ПП.

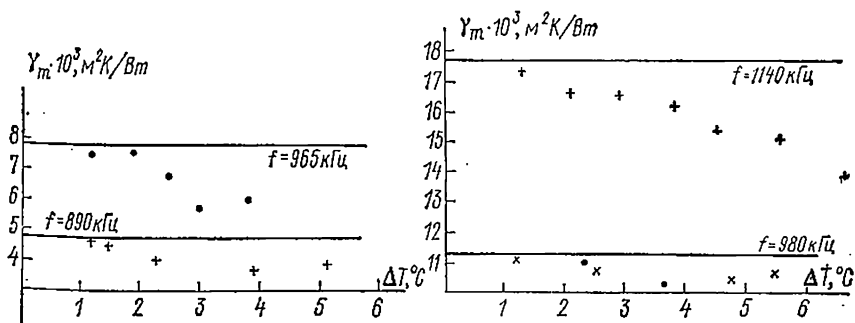


Рис. 9.9. Зависимость  $\gamma_m$  от приращения температуры ЖКП.  
+ 1140 кГц; ● 970 кГц; × 980 кГц.

Задача обеспечения линейной зависимости между  $\Delta T$  и  $J_0$  совпадает с задачей создания стабильного изображения на ЖКП. В случае конвекции их решение сводится к обеспечению достаточного температурного напора  $T_0 - T_1$  и для ПП из пластмасс оно может быть сформулировано в виде условия

$$\Delta T_m \leq (0,1 \div 0,3) (T_0 - T_1); \quad h_{\max} \leq 4 \text{ мм}, \quad (9.36)$$

где  $\Delta T_m$  — максимальное значение температуры теплового рельефа поверхности ПП;  $h_{\max}$  — максимальная толщина ПП.

При выборе диапазона существования холостерической мезофазы  $\Delta T_\phi$  пленки, используемой для визуализации, естественно потребовать, чтобы  $\Delta T_m \leq \Delta T_\phi$ . Если стабилизация изображения обеспечивается конвекцией, то значение  $\Delta T_m$  не должно превышать 1—2°С. С ростом  $\Delta T_m$  затрудняется выполнение условий (9.36), так как это приводит к соответствующему увеличению  $T_0$ . Диапазон возможных значений  $\Delta T_m$  может быть расширен за счет применения термостатов, что, кроме того, уменьшает влияние на результаты визуализации изменений внешних условий.

Величина минимальной интенсивности, при которой получается изображение, в зависимости от свойств материала ПП и его акустического согласования может принимать значения от 30 мВт/м<sup>2</sup> до 600 Вт/м<sup>2</sup>, но при этом время формирования изо-

бражения составляет минуты. Например, на рис. 9.10 показаны зависимость  $\Delta T$  от времени накопления  $t$  при постоянной интенсивности УЗ. Кривая 1: материал ПП — полистирол,  $h = 1,85$  мм,  $f = 970$  кГц,  $J_0 = 1400$  Вт/м<sup>2</sup>; кривая 2: материал ПП — оргстекло,  $h = 1,03$  мм,  $f = 1020$  кГц,  $J_0 = 2000$  Вт/м<sup>2</sup>. Время накопления пропорционально температуропроводности материала ПП и обратно пропорционально интенсивности УЗ. При интенсивностях УЗ порядка  $(2 \div 3) \cdot 10^3$  Вт/м<sup>2</sup> время появления изображения 1—3 с, а время стирания изображения при естественном теплообмене с воздухом 5—8 с.

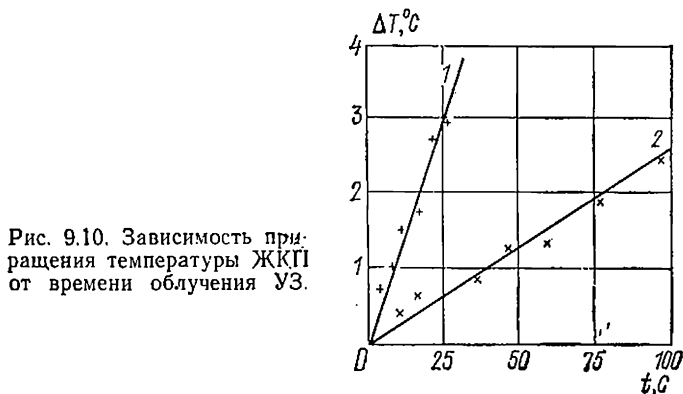


Рис. 9.10. Зависимость приращения температуры ЖКП от времени облучения УЗ.

В общем случае величина коэффициента поглощения УЗ зависит от толщины, числа и физических характеристик материалов слоев. Учитывая, что толщина ЖКП и контактной жидкости много меньше толщины ПП, их наличием при расчетах можно пренебречь. Максимальное значение коэффициента поглощения  $D$  обеспечивается при резонансном поглощении УЗ. В рассматриваемом случае условие резонансного поглощения УЗ (акустическое согласование) записывается так:  $h = n\lambda/2$ , где  $h = 1, 2, 3 \dots$ ,  $\lambda$  — длина УЗ волны в материале ПП.

Минимальная частота детектора  $f_{\min}$ , на которой еще возможно акустическое согласование, определяется из равенства  $\lambda/2 = h_{\max}$ . Согласно условию (9.36)  $h_{\max} \leq 4$  мм, т. е. длина УЗ волны в материале не должна превышать 8 мм. Получаем, что для оргстекла  $f_{\min} = 350$  кГц, а для полистирола  $f_{\min} = 330$  кГц. Уменьшение  $f_{\min}$  связано с выбором материала ПП с малой скоростью УЗ в нем.

Примеры использования ЖКП для визуализации УЗ полей представлены на рис. 9.11 и 9.12. На рис. 9.11 показана фотография ближнего поля дискового ПКЭ с волновым  $ka_0 = 25$ , где  $a_0 = 12,5$  мм — радиус ПКЭ,  $k$  — волновое число УЗ на частоте  $f = 480$  кГц. ПКЭ лежал на дне ванночки, заполненной водой. ПП помещена на расстоянии, соответствующем ближайшему к поверхности излучателя максимуму давления УЗ на оси излучателя ( $l = 2,5$  мм). Более светлые участки на фотографии

соответствуют большей интенсивности УЗ. Черные участки соответствуют красному цвету пленки. Диаметр центрального пятна 2,5 мм. В этом пятне пленка имеет все цвета от красного



Рис. 9.11. Ближнее поле дискового ПКЭ с  $ka_0 = 25$ .



Рис. 9.12. Интерференционная картина в замкнутом объеме ( $\varnothing = 26$  мм, толщина 7 мм) на частоте 1 МГц.

по периферии до фиолетового в центре ( $\Delta T = 5^\circ\text{C}$ ). Это свидетельствует о высокой разрешающей способности ЖКП по цвету.

На рис. 9.12 показана фотография интерференционной картины, которая возникла в замкнутом цилиндрическом объеме,

заполненном водой, между пьезопластиной с  $a_0 = 13$  мм и ПП, находящимся от нее на расстоянии 7 мм на частоте 1 МГц.

**Применение ЖКД для визуализации УЗ в газах.** Визуализация УЗ полей ПКЭ в газах (воздухе) производится по схеме, показанной на рис. 9.13, на котором изображены основные элементы установки визуализации и показано их пространственное расположение.

В общем случае установка визуализации УЗ полей в газах имеет структурную схему, аналогичную установке для визуализации УЗ в жидкостях (см. рис. 9.7).

При возбуждении ПКЭ в газах ухудшается его теплообмен с окружающей средой. Для того чтобы избежать перегрева ПКЭ в непрерывном режиме излучения, установка (см. рис. 9.13)

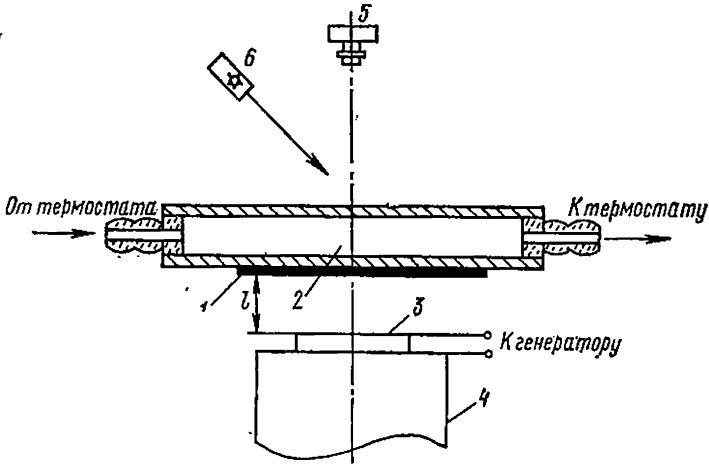


Рис. 9.13. Схема визуализации УЗ полей ПКЭ в воздухе.  
1 — ЖКП; 2 — кювета термостата; 3 — исследуемый ПКЭ; 4 — теплопровод; 5 — фотокамера; 6 — осветитель.

должна иметь теплоотвод. Его обычно выполняют из красной меди или латуни. Для повышения эффективности теплоотвода внутренняя часть его может иметь полость, через которую прокачивается вода от термостата.

Работу и основные характеристики ЖКД при визуализации УЗ полей в газах рассмотрим на примере исследования УЗ поля плоского ПКЭ, состоящего из пьезокерамической пластинки диаметром 25 мм и толщиной 2 мм и алюминиевой накладкой такой же формы. Исследуемый ПКЭ лежал на теплоотводе, соприкасаясь с ним накладкой (см. рис. 9.13). Верхняя поверхность ПКЭ была расположена вровень с поверхностью экрана из оргстекла, а зазор между боковой поверхностью ПКЭ и экраном не превышал  $0,05\lambda$ , где  $\lambda$  — длина волны УЗ в воздухе. Распределение колебаний по поверхности ПКЭ получено методом оптической голографии (см. рис. 9.6). ПКЭ возбуждался от гене-

частоте  $f = 49,4$  кГц. Напряжение возбуждения вертикального перемещения, выполненный на основе вертикального перемещения биологического позволял плавно изменять расстояние  $l$  между толщиной ПКЭ и ЖКП от нуля до 150 мм и фиксированностью до 0,05 мм [73].

ЖКД состоит из холодильника (см. рис. 9.13) с наклеенной на его нижнюю сторону ЖКП. Холодильник представляет собой плоский сосуд размером  $100 \times 100 \times 10$  мм<sup>3</sup> с отверстиями для протока воды из термостата УТУ-2/77. Верхняя и нижняя стенки холодильника изготовлены из стекла, чтобы можно было наблюдать и регистрировать получаемые на ЖКП изображения. Важной функцией холодильника было также поддержание температуры ЖКП вблизи нижнего порога существования холестерической фазы ( $25,2^\circ\text{C}$ ). При такой температуре чувствительность ЖКД оказывалась максимальной. Активной частью ЖКД была ЖКП толщиной  $h = 150$  мкм, выполненная на основе поливинилового спирта. ЖКП имела температуру перехода в жидкокристаллическое состояние  $25^\circ\text{C}$  и интервал холестерической мезофазы  $5^\circ\text{C}$ .

Изображение, получаемое на ЖКП, фотографировалось или наблюдалось визуально. Оптическая ось фотоаппарата совпала с центральной осью установки (см. рис. 9.13). Оптическая ось источника света составляла угол  $45^\circ$  с центральной осью установки.

На рис. 9.14 приведены результаты сравнения теоретически рассчитанных по (9.32) распределений модуля безразмерного потенциала скорости  $|\Phi_0(\bar{r}_1)|$  вдоль верхней пластины с изображениями на ЖКП, полученными при разных расстояниях  $l$  между ЖКП и верхней поверхностью ПКЭ. Расстояния  $l$  были соответственно равны 2, 3, 4 мм. Светлые области на фотографиях соответствуют большей температуре ЖКП и, следовательно, большей интенсивности УЗ.

В цветном изображении картина поля имела следующий вид. На красном фоне четко видны изображения максимумов, имеющие другой цвет. Центральный максимум голубого цвета, а дальше от центра на периферию кольца окрашены соответственно в зеленый, желтый и оранжевый цвета. К особенностям этого изображения можно отнести то, что расстояние между ближайшими максимумами равно  $\lambda/2 = 3,4$  мм, а наиболее удаленный максимум находится примерно на расстоянии  $\lambda/4$  от края излучающей пьезопластины.

Видно, что при  $l < \lambda/2$  имеет место хорошее качественное совпадение результатов расчета и эксперимента. При значении  $l = 4$  мм (рис. 9.14, в) в эксперименте в центре изображения УЗ поля наблюдается минимум УЗ, не предсказываемый теорией, так как согласно распределению  $|\Phi|$  в центре должен быть довольно значительный максимум.

Методом двухлучевой интерферометрии [14, 119] нами было установлено, что, когда расстояние между поверхностью ПКЭ и ЖКП больше  $\lambda/2$ , распределение колебаний поверхности ПКЭ

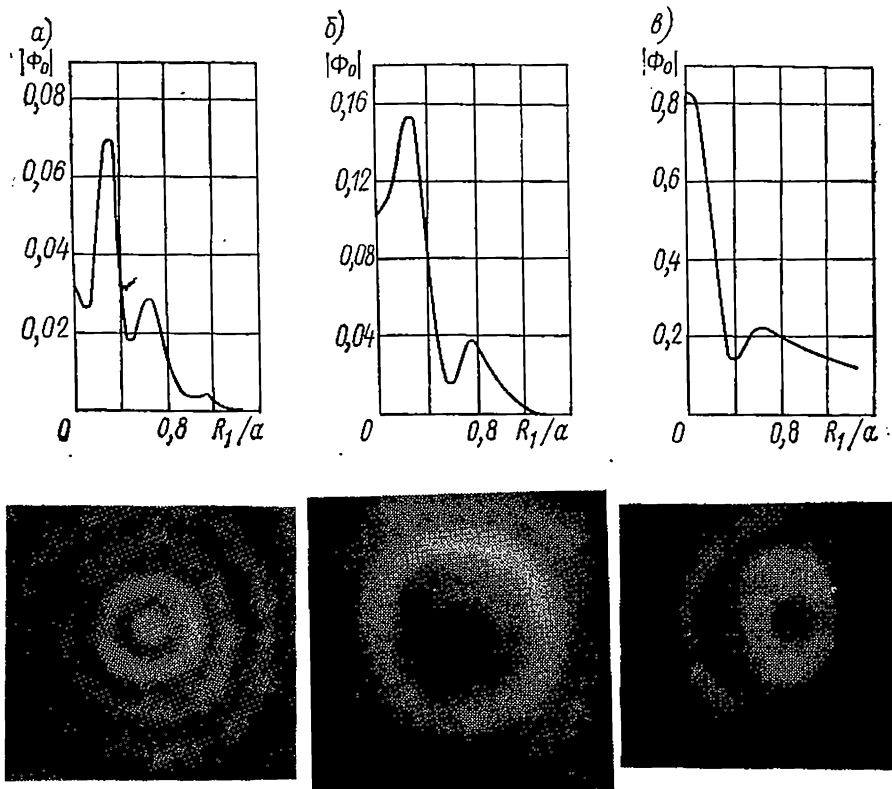


Рис. 9.14. Сопоставление расчетов  $|\Phi_0(R_1)|$  с результатами визуализации УЗ поля при различных расстояниях  $l$  между поверхностью ПКЭ и ЖКП: а — 2 мм; б — 3 мм; в — 4 мм.

начинает отличаться от распределения, полученного при излучении ПКЭ в свободное полупространство. Особенно сильно искажается форма колебаний ПКЭ при  $l = n\lambda/2$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Такое искажение формы колебаний поверхности ПКЭ обусловлено тем, что при  $l \geq \lambda/2$  начинает сказываться обратное влияние ограниченной среды на УЗ источник.

О временных характеристиках ЖКД можно судить по результатам следующего эксперимента [75]. После подачи на ПКЭ возбуждающего напряжения изображение на ЖКП начинает появляться через время  $t_1$  и окончательно стабилизируется

через время  $t_2$ . Следовательно, промежутки времени  $t_1$  и  $t_2$  характеризуют инерционность метода визуализации УЗ полей в газах.

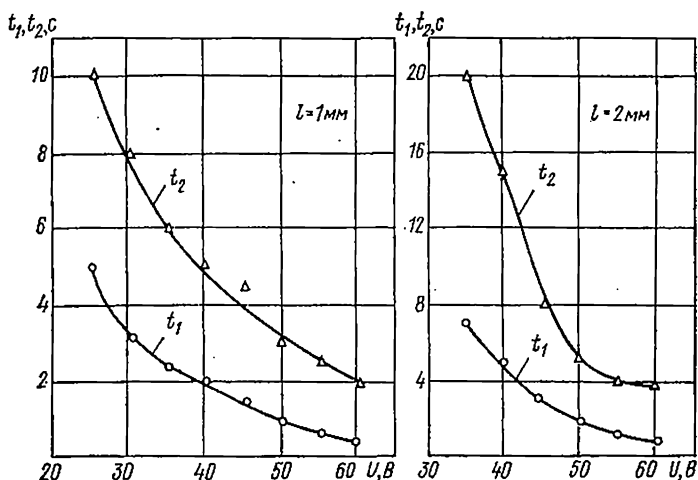


Рис. 9.15. Зависимость времени появления  $t_1$  и времени стабилизации  $t_2$  изображения поля на ЖКД от напряжения возбуждения ПКЭ.

Результаты эксперимента представлены на рис. 9.15. В эксперименте были использованы те же ПКЭ и ЖКД, которые были использованы в опытах по сопоставлению распределения  $|\Phi|$  и изображения, возникающего на ЖКП (см. рис. 9.14). Сопоставляя результаты измерений (см. рис. 9.15), видим, что с увеличением расстояния между ЖКП и поверхностью ПКЭ инерционность ЖКД растет, а с увеличением величины возбуждающего напряжения — падает.

В испытываемом ЖКД была применена ЖКП толщиной 150 мкм. Использование ЖКП толщиной 250 мкм приводило к увеличению времени  $t_1$  более чем вдвое, а времени  $t_2$  в среднем в 3—3,5 раза. Поэтому для создания малоинерционных ЖКД следует применять тонкие ЖКП.

В § 9.1 было показано, что время задержки теплового потока определяется параметрами стенки кюветы. В испытываемом ЖКД стеклянная стенка имела толщину 1 мм. Используя формулу (9.32) и физические параметры стекла (см. табл. 9.1), получаем время задержки  $t_3 \approx 0,5$  с. Сопоставляя полученный результат с результатами эксперимента (рис. 9.15), видим, что большую часть времени формирования изображения происходит при наличии теплообмена между стенкой и жидкостью термостата.

Изображение поля одиночных коротких мощных УЗ импульсов может быть сформировано за время меньшее  $t_3$ . В этом случае термостатирование кюветы позволяет быстро стирать изо-

бражение, подготавливая ЖКД к получению новых изображений. Частота смены изображения порядка 1 Гц.

Совместное использование выражения (9.30) и формул для коэффициентов поглощения Константинова (9.14) и (9.15) позволяет оценить чувствительность  $\gamma_r$  метода визуализации. Например, для ЖКД, использованного при визуализации УЗ поля (см. рис. 9.14) на частоте 50 кГц величина  $\gamma_r = 3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \cdot \text{К}/\text{Вт}$ . Величина  $\gamma_r$  зависит от частоты  $f$  УЗ и возрастает пропорционально  $\sqrt{f}$ . Если ЖКП используется для визуализации без холодильника (т. е. ЖКП просто натянута над ПКЭ), то чувствительность метода существенно возрастает. В некоторых случаях она изменяется более чем в 100 раз, но стабилизация изображения становится практически невозможной.

Картина УЗ поля, показанная на рис. 9.14, а, получена для ПКЭ в экране. Если экран убрать, не изменяя других условий, то картина становится более четкой [68]. Приращение температур в максимумах возрастает, но распределение температур искажено, так как в формировании картины поля существенную роль играет наличие неоднородности типа скачка поперечного сечения слоя, на котором цилиндрическая волна с плоским фронтом претерпевает отражение. Экспериментально подтверждено, что изображение поля ПКЭ локализовано областью, имеющей площадь, меньшую площади излучающей поверхности ПКЭ (см. рис. 9.16).

Сопоставление величин коэффициента поглощения Константинова (9.14) и (9.15) с величиной поглощения УЗ энергии в объеме газа вдали от стенок показывает, что (во всяком случае на низких частотах) диссипация УЗ энергии в объеме газа не играет решающей роли при визуализации акустических полей в газах.

В опытах на высоких частотах исследовались кварцевая пластинка  $Z$  — среза толщиной 2 мм и диаметром 18 мм. Резонансная частота пластины 778 686 Гц, напряжение возбуждения 100 В. Распределение колебаний поверхности пластины было получено методом двухлучевой интерферометрии и показано на рис. 9.16, а. В этом распределении зоны с максимальной амплитудой колебаний (порядка 0,25 мкм) расположены ближе к центру.

На указанной частоте длина УЗ волны в воздухе  $\lambda = 0,44$  мм. Кварцевая пластинка имеет  $ka_0 = 129$ , зоны колебаний (вдоль диаметра, проведенного через максимумы колебаний) —  $ka_1 = 14$ , а узлы между пучностями —  $k\Delta = 3$ , где ширина узла  $\Delta$  примерно равна  $\lambda/2$ .

Результаты визуализации поля кварцевой пластинки с помощью ЖКД при  $l = 3$  мм представлены на рис. 9.16, б. Сопоставляя обе картинку, нетрудно заметить, что оба распределения имеют сходную структуру. По этой причине на высоких частотах можно говорить не о визуализации ближнего поля, а визуализации форм колебаний пластины.



Из распределения (см. рис. 9.16, б) непосредственно следует, что каждая зона колебаний поверхности кварца создает ближ-

а)

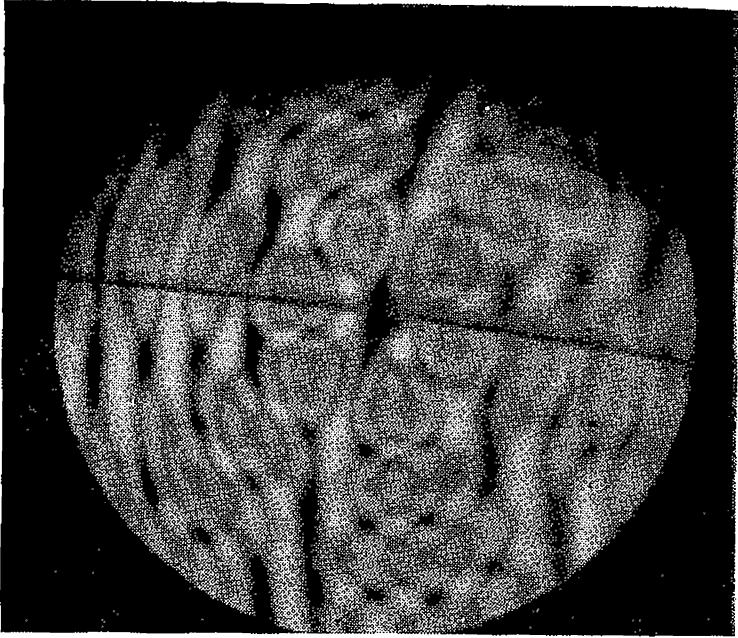


Рис. 9.16. Результаты визуализации УЗ поля кварцевой пластины (метод двухлучевой интерферометрии);

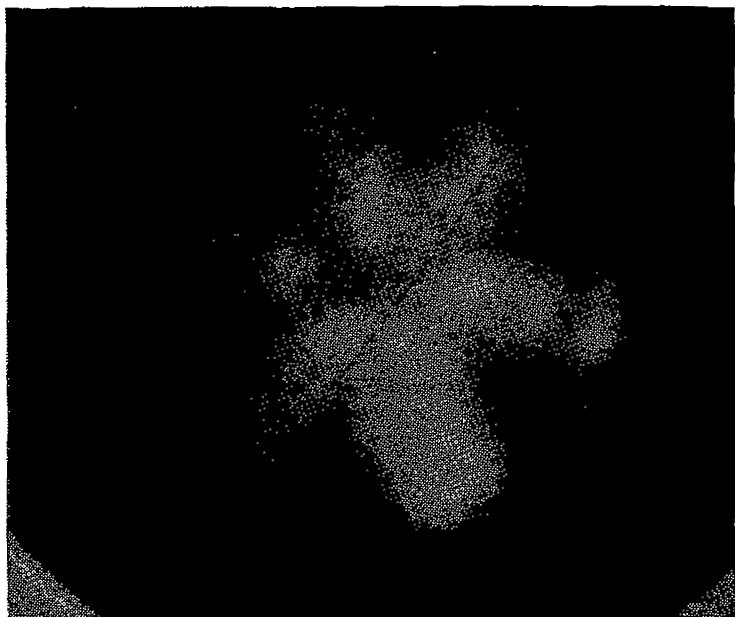
нее поле независимо от наличия других зон колебаний. Можно считать, что для каждой отдельной зоны колебаний выполнены условия, при которых возможно формирование ее характеристики направленности, так как  $l = 3$  мм превосходит расстояние 2,25 мм, соответствующее началу ее дальнего поля. Переотражения между зоной излучения и поверхностью пленки не возникают из-за сильного затухания УЗ в воздухе и на границе раздела воздух — ЖКП.

**Визуализация теплового поля поверхности ПКЭ.** Схема регистрации распределения температур по поверхности возбужденного ПКЭ показана на рис. 9.3. Исследуемый ПКЭ устанавливается на подставку, выполненную из фторопласта. Поверхность верхнего электрода смазывается обезвоженным маслом, которое обеспечивает тепловой контакт электрода накладываемой на него ЖКП. Между верхней поверхностью ЖКП и воздухом обеспечивается конвективный теплообмен [36, 37].

Подставка имеет коническую выемку (см. рис. 9.3). Это обеспечивает уменьшение влияния закрепления на распределение амплитуд колебаний поверхности ПКЭ и наличие воздушного

промежутка, который не позволяет нижней поверхности ПКЭ контактировать с подставкой. Это важно с точки зрения сниже-

д)



ы на частоте 778,7 кГц: а — распределение колебаний поверхно-  
б — изображение поля пластинки на ЖКД.

ния искажений поля температур за счет теплопроводности материала подставки.

Для визуализации температурного поля ПКЭ использовались ЖКП на основе поливинилового спирта толщиной 100 мкм. Диапазон существования холестерической мезофазы ЖКП был от 42 до 60° С.

Термографирование возбужденных на любом резонансе ПКЭ может производиться двумя способами.

При термографировании первым способом ПКЭ подключается к аппаратуре возбуждения на время 30—60 с. По истечении этого времени на ПКЭ накладывается ЖКП, предварительно смазанная контактной жидкостью. ЖКП воспроизводит температурный рельеф, образовавшийся на поверхности ПКЭ в результате возбуждения. Малая теплоемкость ЖКП по сравнению с теплоемкостью ПКЭ обеспечивает минимальные искажения температурного рельефа.

Отсутствие предварительной информации о скорости изменения температуры ПКЭ может привести к перегреву отдельных его участков выше верхней температуры существования мезофазы и они могут быть восприняты как неразогревающиеся.

Для того чтобы исключить возможность таких ошибок, в начальных опытах время возбуждения ПКЭ должно быть выбрано минимальным и по мере необходимости увеличиваться.

Фотографирование температурного рельефа производится сразу после осуществления контакта ЖКП и поверхности ПКЭ. Задержка регистрации термограммы на время до 5 с не приводит к заметным искажениям температурного рельефа. Термограммы получались при освещении ЖКП под углом  $45^\circ$  к нормали зеленым светом. Фотографирование осуществлялось через зеленый светофильтр.

При термографировании по второму способу ЖКП посредством контактной жидкости наносится на поверхность ПКЭ, после чего ПКЭ подключается к аппаратуре возбуждения. Способ позволяет наблюдать процесс формирования температурного рельефа непрерывно от момента включения до достижения поверхности ПКЭ температур, превышающих верхний порог мезофазы.

Наличие ЖКП на поверхности ПКЭ в период возбуждения приводит к некоторому изменению условия формирования его теплового поля. Однако опираясь на результаты работы [67] и полагая условия теплопередачи с верхней поверхности ЖКП и нижней поверхности ПКЭ в воздух одинаковыми, можно показать, что искажения температурного поля за счет ЖКП малы.

На рис. 9.17 представлены фотографии распределений температуры трех ПКЭ кольцевого типа (12—30; 15—30; 16—30). Термографирование производилось на частоте толщинного резонанса (указана на рисунке в килогерцах), определяемой по максимуму тока в слабом поле. Напряжение возбуждения 30 В. Термограммы получены вторым способом<sup>1</sup>. Верхний ряд термограмм зафиксирован через 5 с после включения напряжения, а каждый последующий с интервалом 5 с по отношению к предыдущему.

ПКЭ относительно фотоаппарата были ориентированы в пространстве одинаково. Этому способствовало наличие пазов для грамм (см. рис. 9.17) ПКЭ показывает существенные отличия параметров их температурных полей как по скорости изменения температуры, так и пространственному расположению максимумов температурного поля. Чтобы судить о скорости изменения температуры, необходимо учитывать, что в центре разогретой области ПКЭ № 15—30 через 15 с после включения она достигала  $60^\circ\text{C}$ .

Следует отметить, что вид термограмм зависит от величины напряжения возбуждения. Кроме того, не существует простой зависимости между температурой разогрева отдельных участков напряжением возбуждения и временем разогрева. Например, даже через 25 с у всех ПКЭ (см. рис. 9.17) имеются участки, температура которых значительно ниже остальных областей

<sup>1</sup> Термограммы получены Н. Я. Исаковым.

кольца. При увеличении времени разогрева температура этих участков повышается и приближается к температуре разогретых частей за счет теплопроводности керамики.

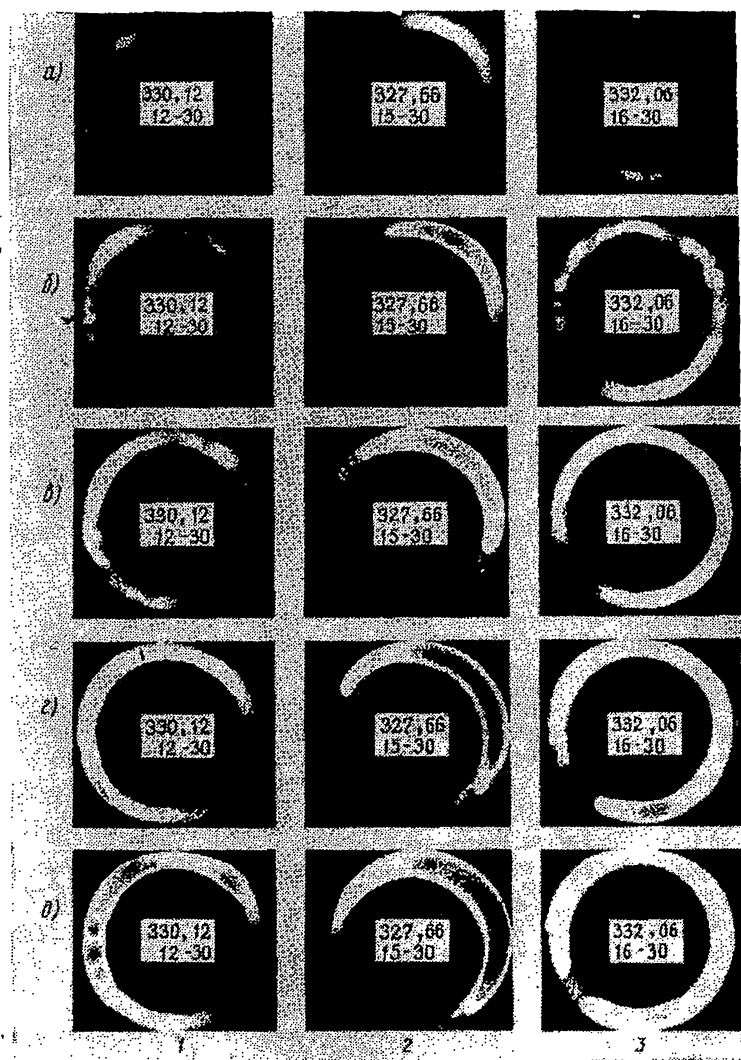


Рис. 9.17. Термограммы трех различных кольцевых ПКЭ.

Для того чтобы теплопроводность керамики не искажала результаты, нужно ограничивать время ее разогрева. В данном случае это время не должно превышать 15 с.

Нами было произведено сопоставление распределений амплитуд колебаний поверхности ПКЭ, получаемых методом двухлучевой интерферометрии и распределений температур поверхности ПКЭ, возбуждаемых в одинаковых условиях. Опыты показали наличие корреляции между этими распределениями.

## УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ

---

1. Абрамович В. Г. Термоиндикаторы и их применение. М., Энергия, 1972.
2. Акустические кристаллы/Под ред. М. П. Шаскольской. М., Наука, 1982.
3. Алексеев Б. Н., Дианов Д. Б. О расширении полосы пропускания пьезокерамических преобразователей с помощью переходных слоев. — Акуст. ж., 1974, т. 20, вып. 5, с. 663—668.
4. А. с. № 462146 (СССР). Устройство для измерения активного сопротивления кварцевых резонаторов/Жуков В. К., Овсянников П. А. — Заявл. № 1919452 от 04.05.73; Оpubл. 28.02.1975; БИ № 8, 1975, с. 89.
5. А. с. № 463932 (СССР). Автоматическое устройство допускового контроля пьезоэлектрических резонаторов/Мотин П. Е., Баржин В. Я. и др. — Заявл. 30.09.71, № 1701274; Оpubл. 15.03.1975; БИ № 10, 1975, с. 103.
6. А. с. № 492049 (СССР). Электрический преобразователь с управляемой резонансной частотой/Кривин В. А. — Заявл. Оpubл. БИ № 4, 1975, с. 144.
7. А. с. № 651271 (СССР). Устройство для измерения активного сопротивления кварцевых резонаторов/Гуторов А. Д. — Заявл. 28.01.75, № 2100395; Оpubл. 05.03.1979; БИ № 9, 1979, с. 183.
8. А. с. № 684470 (СССР). Устройство для измерения активного сопротивления кварцевых резонаторов/Каныгин В. И., Павлов В. К., Скрыпник Ю. А. — Заявл. 21.04.77, № 2478011; Оpubл. 06.09.1979; БИ № 33, 1979.
9. А. с. № 731557. Устройство для измерения резонансной и антирезонансной частот пьезоэлектрических резонаторов/Тимошенко С. П., Парфенов Б. Г. — Заявл. 06.12.77, № 2558263; Оpubл. 30.04.1980; БИ № 16, 1980, с. 275.
10. А. с. № 756318 (СССР). Устройство допускового контроля пьезоэлектрических резонаторов/Храмов А. В., Черных Б. Н., Тимошенко С. П. — Заявл. 12.12.78, № 2695294; Оpubл. 15.08.1980; БИ № 30, 1980, с. 255.
11. А. с. № 767661 (СССР). Устройство для измерения резонансной и антирезонансной частот пьезокерамических резонаторов/Титов В. А., Черных Б. Н. — Заявл. 03.05.78, № 2608909; Оpubл. 30.09.1980; БИ № 36, 1980, с. 235.
12. А. с. № 779926 (СССР). Устройство для автоматического измерения частот минимального и максимального импедансов пьезоэлектрических резонаторов/Тимошенко С. П., Парфенов Б. Г. — Заявл. 12.12.78, № 2695293; Оpubл. 15.11.1980; БИ № 42, 1980, с. 243.
13. А. с. № 934355. Визуализатор ультразвукового поля/Легуша Ф. Ф., Финагин Б. А. — Заявл. 16.07.79, № 2802548; Оpubл. 07.06.82, БИ № 21, 1982, с. 206.
14. Бергман Л. Ультразвук и его применение в науке и технике. М., ИЛ, 1957.
15. Бобыль В. Г., Прудько Н. И. Определение емкости «зажатого» пьезопреобразователя, его упругих и пьезоконстант из измерений адмитанса

- в двух точках резонансной области. — В сб. Материалы IX Всесоюзной акуст. конф. М., 1977, с. 87—90.
16. Богданов С. В., Тимонин А. М. К методике измерения пьезомодуля из радиальных колебаний диска. — Известия АН СССР Сер. физ., 1954, т. 21, № 3, с. 397—398.
17. Бородин В. З., Залесский В. В., Крамаров О. П. и др. Об измерении пьезоэлектрических констант пьезокерамики. — В сб. Пьезоэлектрические материалы и преобразователи. Ростов-на-Дону, Изд. РГУ, 1969, с. 52—65.
18. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М., Наука, 1973.
19. Ганичев Г. М., Легуша Ф. Ф. Применение ЖКП для визуализации ультразвука в воздухе. — Акуст. ж., 1979, т. 25, вып. 4, с. 619—622.
20. Ганопольский В. В., Пугачев С. И. Установка для исследования гидроакустических пьезопреобразователей. — В сб.: Материалы Всес. конф. Использование современных физических методов в неразрушающем контроле и исследованиях. Хабаровск, 1984, с. 34—36.
21. Ганопольский В. В., Пугачев С. И. Определение параметров пьезопреобразователей методом оптимизации. — В сб.: Сегнетоэлектрики и пьезоэлектрики. Калинин, Изд. КГУ, 1983, с. 129—132.
22. Глозман И. А. Пьезокерамика. М., Энергия, 1972.
23. ГОСТ 13927—80. Материалы пьезокерамические. Технические условия.
24. ГОСТ 12370—80. Материалы пьезокерамические. Методы испытаний.
25. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в твердых телах. Киев, Наукова думка, 1961.
26. Грищенко Е. К. Пьезокерамический поглотитель ультразвука пластинчатого типа. — Акуст. ж., 1982, т. 28, вып. 4, с. 486—488.
27. Грищенко Е. К. Тонкостенный сферический приемник с управляемой электрической нагрузкой. — Акуст. ж., 1982, т. 28, № 1, с. 25—31.
28. Евдокимов Н. А. Исследование ультразвуковых вибраторов по входному сопротивлению. — Известия ЛЭТИ, 1959, вып. 37, с. 249—261.
29. Залесский В. В. Анализ и синтез пьезоэлектрических преобразователей. Ростов-на-Дону, Изд. РГУ, 1971.
30. Зернов Н. В., Карпов В. Г. Теория радиотехнических цепей. Л., Энергия, 1972.
31. Зобнин О. Н., Несмашная О. М., Яковлев Л. А. О возможностях ультразвукового способа определения пьезоэлектрических и упругих постоянных пьезокерамики. — Известия ЛЭТИ, 1974, вып. 145, с. 78—83.
32. Иванчин В. Ф., Шкиндеров Е. Г. Автоматическое измерение параметров пьезокерамических резонаторов. — Электронная техника, сер. 14 «Материалы», 1971, с. 59—65.
33. Ивина Н. Ф., Касаткин Б. А. Анализ возможности построения многофункциональных перестраиваемых пьезопреобразователей. — Дефектоскопия, 1980, № 2, с. 96—101.
34. Ивина Н. Ф., Касаткин Б. А. Нормальные волны в анизотропном пьезоактивном волноводе. — Дефектоскопия, 1975, № 4, с. 27—32.
35. Иоффе В. К., Янпольский А. А. Расчетные графики и таблицы в электроакустике. М., ГИФМЛ, 1954.
36. Исаков Н. Я., Легуша Ф. Ф., Лихов А. Б. Способ подбора ПКЭ для источников ультразвука технологического назначения. — В кн.: Сегнетоэлектрики и пьезоэлектрики. Калинин, Изд. КГУ, 1983, с. 132—136.
37. Исаков Н. Я., Легуша Ф. Ф., Пугачев С. И. Связь структурных характеристик ПКЭ с распределением смещений по их поверхности. — В кн.: Сегнетоэлектрики и пьезоэлектрики. Калинин, изд. КГУ, с. 149—152.
38. Капустин А. П. Экспериментальное исследование жидких кристаллов. М., Наука, 1978.
39. Капустина О. А. Свойства жидких кристаллов в акустическом поле. — Акуст. ж., 1974, т. 20, вып. 1, с. 1—22.
40. Касаткин Б. А., Лебедев В. Г. Спектр собственных частот нагруженной пьезопластины с переходным слоем. — Акуст. ж., 1979, т. 25, вып. 3, с. 395—400.

41. Касаткин Б. А., Матвиев Ю. В. К оценке широкополосности низкочастотных цилиндрических преобразователей. — Акуст. ж. 1983, т. 29, вып. 1, с. 60—63.
42. Касаткин Б. А., Матвиев Ю. В. Цилиндрический пьезопреобразователь с управляемыми характеристиками. — Акуст. ж. 1982, т. 28, вып. 5, с. 648—652.
43. Касаткин Б. А. Импульсные и переходные характеристики слоистого пьезопреобразователя, нагруженного на воду. — Акуст. ж. 1981, т. 27, вып. 1, с. 153—155.
44. Касаткин Б. А. Некоторые характеристики управляемых пьезопреобразователей. — Дефектоскопия, 1978, № 11, с. 34—38.
45. Касаткин Б. А. Обобщенная ортогональность нормальных мод колебаний по толщине нагруженной пьезопластины. — Акуст. ж., 1978, т. 24, вып. 2, с. 203—208.
46. Касаткин Б. А. Основные характеристики пьезопреобразователя при импульсном нагружении. — Акуст. ж., 1979, т. 25, вып. 4, с. 543—546.
47. Касаткин Б. А. Расчет частоты оеновой моды колебаний круглых пластин и цилиндров произвольных размеров. — Дефектоскопия, 1978, № 12, с. 75—78.
48. Касаткин Б. А., Павин Н. Я. Импульсные частотные характеристики контактного пьезопреобразователя. — Дефектоскопия, 1978, № 8, с. 17—21.
49. Касаткин Б. А., Павин Н. Я. Многопараметровая оптимизация и энергетические оценки широкополосных пьезопреобразователей. — Акуст. ж., 1980, т. 26, вып. 5, с. 721—726.
50. Касаткин Б. А., Павин Н. Я. Об одном способе перестройки рабочей частоты пьезопреобразователя. — Дефектоскопия, 1980, № 1, с. 17—21.
51. Касаткин Б. А., Павин Н. Я. Об одном способе построения многорезонансных управляемых пьезопреобразователей. — Дефектоскопия, 1983, № 4, с. 73—76.
52. Касаткин Б. А., Павин Н. Я. Сравнительный анализ и энергетические оценки широкополосных преобразователей. — Дефектоскопия, 1979, № 1, с. 61—66.
53. Касаткин Б. А., Павин Н. Я. Энергетическая оценка эффективности работы пьезопреобразователя в импульсном режиме. — Дефектоскопия, 1977, № 5, с. 30—34.
54. Касаткин Б. А., Павин Н. Я. Энергетические и спектральные оценки широкополосного возбуждения пьезопреобразователей импульсными УМ сигналами. — Дефектоскопия, 1979, № 4, с. 56—60.
55. Квятковская Т. С., Легуша Ф. Ф., Прохорова Е. В. и др. Визуализатор ультразвукового поля. АС СССР № 717646. Опубликовано в БИ, 25.02.80, № 7, с. 145.
56. Квятковская Т. С., Легуша Ф. Ф., Прохорова Е. В. и др. Визуализация ультразвука с помощью ЖКП. — Акуст. ж., 1979, т. 25, вып. 2, с. 297—298.
57. Квятковская Т. С., Легуша Ф. Ф., Прохорова Е. В. и др. Исследование возможности акустических измерений с помощью жидкокристаллических пленок. — В сб.: Материалы IX Всес. акуст. конф. М., 1977, с. 25—28.
58. Кожемякин К. Г., Черных Б. Н. Измерение частот резонанса и антирезонанса амплитудным методом. — Электронная техника, сер. 111, Радиодетали и компоненты, 1981, вып. 2(43), с. 68—69.
59. Константинов Б. П. О поглощении звуковых волн при отражении от твердой границы. — ЖТФ, 1939, т. 9, № 3, с. 226—238.
60. Константинов Б. П. Гидродинамическое звукообразование и распространение звука в ограниченной среде. Л., Наука, 1974.
61. Крамаров Ю. А., Вернигора Л. Я., Яценко В. К. и др. Методика определения эквивалентных параметров пьезопреобразователей по двум точкам векторной диаграммы. — В сб.: Материалы VIII Всес. акуст. конф. М., 1973, с. 80—83.

62. Купрадзе В. Д. Методы потенциала в теории упругости. М., Физматиздат, 1963.
63. Кэди У. Пьезоэлектричество и его практические применения. М., ИЛ, 1949.
64. Лазуткин В. Н. К вопросу об определении параметров пьезокерамических материалов методом резонанса — антирезонанса. — Вопросы радиоэлектроники, сер. III. Детали и компоненты радиоаппаратуры, 1965, вып. 5, с. 69—77.
65. Лазуткин В. Н. Определение коэффициентов электромеханической связи многорезонансных вибраторов. — В сб.: Материалы IX Всес. акуст. конф. М., 1977, с. 31—34.
66. Лайнс М., Гласс А. Сегнетоэлектрики и родственные им материалы. М., Мир, 1981, с. 582—603.
67. Легуша Ф. Ф. Оценка влияния ЖКП на параметры теплового поля при визуализации ультразвука. — Тр. ЛКИ. Сер. Судовая акустика, 1979, с. 76—79.
68. Легуша Ф. Ф. Локализация изображения излучающей области при визуализации ультразвуков в газах. — ЖТФ, 1982, т. 52, № 4, с. 723—728.
69. Легуша Ф. Ф. Расчет коэффициентов отражения и прохождения плоской волны через границу раздела жидких сред с учетом их вязкости и теплопроводности. — Письма в ЖТФ, 1982, т. 8, № 22, с. 1390—1392.
70. Легуша Ф. Ф. О поглощении звука на границе раздела жидких сред. — Труды 4-го симпозиума по морской электронике. Ростов, 1983, с. 261—265.
71. Легуша Ф. Ф., Финагин Б. А., Фирсов Е. И. Использование жидких кристаллов для акустических измерений. Труды ЛКИ, 1976, вып. 109, с. 68—73.
72. Легуша Ф. Ф., Прохорова Е. В., Тищенко В. Г. и др. Визуализация колебаний поверхности пьезопреобразователей при помощи ЖК. — Тр. ЛКИ, 1976, вып. 109, с. 74—76.
73. Легуша Ф. Ф., Славин В. Н., Хаустов В. Г. Прибор для визуализации ультразвука в воздухе на основе жидкокристаллической пленки. — ПТЭ, 1981, № 6, с. 195—196.
74. Легуша Ф. Ф., Мурга В. А., Славин А. Н. Анализ изображений ультразвукового поля, полученных в воздухе с помощью ЖКП. — Акуст. ж., 1983, т. 29, вып. 1, с. 84—87.
75. Легуша Ф. Ф., Славин А. Н. Стабилизация изображений ультразвукового поля, полученных с помощью ЖКП. — Тр. ЛКИ. Судовая акустика, 1980, с. 106—111.
76. Литвин А. Ф., Гуртовой В. И. О применимости методики резонанса — антирезонанса к измерению динамических параметров пьезокерамики в сильно возбуждающих полях. — В сб.: Пьезоэлектрические материалы и преобразователи. Ростов-на-Дону. Изд. РГУ, с. 96—99.
77. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., Высшая школа, 1967.
78. Ляв А. — Математическая теория упругости. М. — Л., ОНТИ, 1935.
79. Лямшев Л. М. Отражение звука тонкими пластинками и оболочками. М., изд. АН СССР, 1955.
80. Магнитные и диэлектрические приборы. Под ред. Г. В. Катца. М. — Л., Энергия, 1974.
81. Мелькашович А. Ф., Перлатов В. Г. Анализ импульсного метода измерения параметров пьезопреобразователей. — Дефектоскопия, 1973, № 5, с. 93—104.
82. Меркулов Л. Г., Яблоник Л. М., Работа демпфированного пьезопреобразователя при наличии нескольких промежуточных слоев. — Акуст. ж., 1963, т. 9, вып. 4, с. 449—459.
83. Меркулов Л. Г., Яковлев Л. А. Кристаллическая ультразвуковая линия задержки с использованием отклонения луча от нормали. — Акуст. ж., 1962, т. 8, вып. 2, с. 199—203.
84. Михайлов А. И. Колебания преобразователей конечных размеров из электроупругих материалов. Автореферат канд. дисс. Ростов-на-Дону. РГУ, 1978.



85. Михеев М. А., Михеева И. М. Основы теплопередачи. М., Энергия, 1973.
86. Некоторые вопросы прикладной акустики. Ультразвук. Гидроакустика. Под ред. Е. Ричардсона. М., Военное изд-во МО, 1962.
87. Окадзак К. Технология керамических диэлектриков. М., Энергия, 1976.
88. Павин Н. Я. Анализ методов построения и разработка стержневых пьезопреобразователей для излучения акустических сигналов в широкой полосе частот. Автореферат канд. дисс. Л., 1981.
89. Петин О. П., Крамаров Ю. А., Петин Т. П. Установка для измерения адмитансно-частотных характеристик пьезопреобразователей. — В сб.: Пьезокерамические материалы и преобразователи. Ростов-на-Дону, изд. РГУ, 1977, с. 22—25.
90. Пилипович В. А., Садовская О. П., Щербак Ю. М. Изменение входных электрических параметров акустооптической ячейки. — Вестн АН БССР, сер. физ.-мат. наук, 1981, № 2, с. 129—131.
91. Поляризация пьезокерамики/Под ред. Е. Г. Фесенко. Ростов-на-Дону, Изд. РГУ, 1968.
92. Поплавко Ю. М. Физика диэлектриков. Киев, Вища школа, 1980.
93. Приборы и системы для измерения вибрации, шума и удара. Справочник/Под ред. В. В. Ключева. Кн. 2. М., Машиностроение, 1978.
94. Проголопов Р. В., Болтенков В. А., Латьев Б. В. и др. О контроле элементов гидроакустических антенн с электрической стороны. — В сб.: Акустика и ультразвуковая техника. Киев, изд-во Техника, 1976, с. 41—47.
95. Прохоров С. Ю., Чернышев К. В. Электрическое согласование преобразователей в широкой полосе частот. — Акуст. ж., 1977, т. 23, вып. 2, с. 285—291.
96. Прудько Н. И., Бобыль В. Г. Метод для определения комплексных констант пьезокерамики, используемой в гидроакустических преобразователях. — В сб.: Материалы III Дальневост. акуст. конф. Ч. 2. Акустические антенны и преобразователи. Владивосток, изд. ДВПИ, 1982, с. 116—119.
97. Прудько Н. И., Ганопольский В. В., Бобыль В. Г. и др. Автоматическая установка с применением малой ЭВМ для определения параметров пьезопреобразователей. — В сб.: Материалы II-й Дальневосточной акуст. конф. Владивосток, изд. ДВПИ, 1978, с. 34—39.
98. Прудько Н. И. Определение эквивалентных параметров пьезопреобразователей по некоторым значениям адмитанса в резонансной области. — 1-й Дальневосточный акустический сборник, Владивосток, изд. ДВПИ, 1975, с. 272—276.
99. Растринин Л. А. Статистические методы поиска. М., Наука, 1968.
100. Рытов С. М. Акустические свойства малослойной среды. — Акуст. ж., 1971, т. 17, вып. 2, с. 259—262.
101. Рытов С. М. Акустические свойства мелкослойной среды. — Акуст. ж., 1973, т. 19, с. 754—760.
102. Свет В. Д. Оптические методы обработки сигналов. М., Наука, 1971.
103. Свет В. Д. Методы акустической голографии. Л., Наука, 1976.
104. Системы акустического изображения/Под ред. Г. Уэйда, Л., Судостроение, 1981.
105. Скучик Е. Основы акустики. Т. II, М., Мир, 1976.
106. Скучик Е. Простые и сложные колебательные системы. М., Мир, 1971.
107. Смажневская Е. Г., Фельдман Н. Б. Пьезоэлектрическая керамика. М., Сов. радио, 1971.
108. Справочник по специальным функциям/Под ред. М. А. Бравовица, И. И. Стиган. М., Наука, 1979.
109. Таблицы физических величин. Справочник/Под ред. М. К. Кикоина. М., Атомиздат, 1976.

110. Тимошенко С. П. Применение ФАПЧ для измерения частот резонанса и антирезонанса пьезокерамических резонаторов. — В сб.: Дальневосточный акустический сборник. Владивосток, изд. ДВПИ, 1979, вып. 4, с. 42—45.

111. Тюлин В. Н. Введение в теорию излучения и рассеяния звука. М., Наука, 1976.

112. Улитко А. Ф. Об определении коэффициентов электромеханической связи в задачах установившихся колебаний пьезокерамических тел. — В сб.: Математические методы и физико-механические поля. Киев, 1978, вып. 7, с. 77—81.

113. Улитко А. Ф. Энергетический метод определения коэффициентов электромеханической связи в задачах установившихся колебаний пьезокерамических тел. — В кн.: Материалы IX Всес. акуст. конф. Секция П. М., изд-во АКИН, 1977, с. 27—30.

114. Ультразвук (маленькая энциклопедия)/Под ред. И. П. Голяминой, М., Мир, 1979.

115. Ультразвуковые преобразователи/Под ред. Е. Кикучи. М., Мир, 1972.

116. Фесенко Е. Г. Семейство перовскита и сегнетоэлектричество. М., Атомиздат, 1972.

117. Физическая акустика/Под ред. У. Мэзона. Т. 1. ч. А. Методы и приемы ультразвуковых исследований. М., Мир, 1966.

118. Хаякава С. Пьезоэлектрическая керамика. ВЦП, перевод № Ц-89477. М., 1977.

119. Хейран М. Э. Измерение и визуализация акустических волновых полей. ТИИЭР, 1979, т. 67, № 4, с. 2—38.

120. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л., Судостроение, 1972.

121. Яковлев Л. А., Киров Е. А. Ультразвуковой способ определения пьезоэлектрических и упругих постоянных пьезоматериалов. — Зав. лаб., 1971, № 12, с. 1460—1463.

122. Яковлев Л. А., Серебрянникова Н. П. Ультразвуковые исследования характеристик пьезокерамики. — Дефектоскопия, 1980, № 7, с. 52—57.

123. Яффе Б., Кук У., Яффе Г. Пьезоэлектрическая керамика, М., Мир, 1974.

124. Berlincourt D. Piezoelectric Crystals and ceramics. «Ultrasonic transducer materials». Ed. by O. Mattiat. Plenum press. N—Y., London, 1971, ch. 2, p. 63—123.

125. Cook B., Werhan R. Mapping ultrasonic fields with cholesteric liquid crystals, Ultrasonics, 1971, 20, 1, 1—22.

126. Electronic instruments and system. — Hewlett Packard, 1981, p. 112—113.

127. Fletcher R., Reeves C. M. Function minimization by conjugate gradients. The computer J., 1964, v 7, N 2, p. 149—154.

128. Frequency response analyser 1170 series. — Solartron — Schlumberger, 1979.

129. Gladwell G. M., Vijay D. K. Natural frequencies of free finite length circular cylinders. Sound and vibration, 1975, v. 42, p. 387.

130. Gerber E. A., Koerner L. Methods of measurements of the parameters of piezoelectric vibrators. Proc. of the IRE, 1958, v. 46, N 10, p. 1731—1737.

131. Holland R., Eernisse E. P. Accurate measurement of coefficient in ferroelectric ceramic. — IEEE transact. on sonics and ultrasonics, 1969, v. SU—16, N 4, p. 173—181.

132. Holland R. Measurement of piezoelectric phase angles in a ferroelectric ceramic. — IEEE transact. on sonics and ultrasonics, 1970, v. SU—17, N 2, p. 123—124.

133. Holland R. Representation of dielectric, elastic and piezoelectric losses by complex coefficients. — IEEE Transact. on sonics and ultrason. 1967, v. SU—14, N 1, p. 18—20.

134. Hutchinson I. R. S. Axisymmetric vibrations of free finite-length rod. — JASA, 1972, v. 51, N 1, p. 233—240.
135. IRE standards on piezoelectric crystals. — The piezoelectric vibrator definition and methods of measurements, 1957. Proc. IRE, 1957, v. 45, p. 353—358.
136. IRE standards on piezoelectric crystals: Determination of the elastic, piezoelectric, and dielectric constants. — The electromechanical coupling factor, 1958. Proc. IRE, 1958, v. 46, p. 764—778.
137. IRE standards on piezoelectric crystals: measurements of piezoelectric ceramics, 1961. Proc. IRE, 1961, v. 49, p. 1161—1169.
138. Krimholtz R., Leedom D. A., Matthaei G. L. New equivalent circuits for elementary piezoelectric transducers. — Electronics letters, 1970, v. 6, N 13, p. 398—399.
139. Lakestani F., Badoux J. C., Fleischmann P. and Perdrix M., Mesure par une methode impulsionnelle de certaines constantes elastiques, piezoelectrique d'un transducteur. — J. Phys. D: Appl. Phys. 1975, v. 8, p. 1863—1868.
140. Land C. E., Smith G. W., Westgate C. R. The dependence of Small—Signal parameters of ferroelectric ceramic resonators upon state of polarization. — IEEE transact. on sonics and ultrasonics, 1964, v. SU—11, June, p. 8—19.
141. Lypacewicz G., Filipczynski L., Measurement of the clamped capacitance  $C_0$  and obertone method for measuring the electromechanical coupling coefficient  $K_t$  of piezoelectric ceramic transducers under mechanical load. — Proc. of vibration prob., Warsaw, 1970, 4, 11, p. 319—325.
142. Martin G. E. Determination of equivalent-circuit constants of piezoelectric resonator of moderately low Q by absolute—admittance measurements. — JASA, 1954, v. 23, N 3, p. 413—420.
143. Mason W. P. Electromechanical transducers and wave filters. 2-nd ed. Princeton, New Jersey, 1948.
144. Mason W. P. Electrostrictive effect in Barium titanate ceramics. — Phys. Rev., 1948, v. 74, N 9, p. 1134—1147.
145. McMahon R. W. Measurement of Poisson's ration in poled ferroelectric ceramic disks. — IEEE transact. on sonics and ultrason., 1963, SU—10, p. 102—103.
146. Meitzler A. H., O'Bryan H. M., Tiersten J. R. and Harry. Definition and measurement of radial mode coupling factors in piezoelectric ceramic materials with large variations in Poisson's ratio. — IEEE transact on sonics and ultrason. 1973, v. SU—20, N 3, p. 233—239.
147. Onoe M., Jumonji H. Useful formulas for piezoelectric ceramic resonators and their application to measurement of parameters. JASA, 1967, v. 41, N 4, p. 974—980.
148. Onoe M., Tiersten H. F., Meitzler H. H. Shift in the Location of resonant frequencies caused by large electromechanical coupling in thickness-mode resonators. — JASA, 1963, v. 35, n 1, p. 36—42.
149. Piezoelectric ceramics. Tokin, Japan, 1981.
150. Schwarz R. Dreidimensionales Modell einer quaderförmigen Piezokeramik für longitudinale Wellenansbreitung. — Acustica, 1981, v. 47, N 4, S. 275—282.
151. Sigelmann R. A., Caprihan A. Design method for ultrasonic transducers using experimental data and computers. — JASA, 1977, v. 62, N 6, p. 1491—1501.
152. Smits J. G. Iterative method for accurate determination of the real and imaginary parts of the material's coefficients of piezoelectric ceramics. — IEEE transact. on son. and ultrason. 1976, v. SU—23, N 6, p. 393—402.
153. Vector analyzer ZPV. Rohde and Schwarz, 1982.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Глава 1.</b>	<b>Основные свойства пьезокерамических материалов . . . . .</b>	<b>5</b>
§ 1.1.	Уравнения состояния пьезоэлектрической среды. Определение констант пьезоэлектрика . . . . .	5
§ 1.2.	Матрица упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических констант для пьезокерамики и основные соотношения между константами . . . . .	10
§ 1.3.	Коэффициенты электромеханической связи пьезокерамических материалов . . . . .	19
§ 1.4.	Диссипация энергии в пьезокерамике . . . . .	29
§ 1.5.	Промышленные пьезокерамические материалы. Классификация и численные значения констант . . . . .	40
<b>Глава 2.</b>	<b>Пьезокерамические элементы и резонаторы . . . . .</b>	<b>45</b>
§ 2.1.	Основные геометрические типы пьезокерамических элементов (ПКЭ) . . . . .	45
§ 2.2.	Одномерные линейные и планарные моды колебаний ПКЭ . . . . .	50
§ 2.3.	Эквивалентные схемы ПКЭ . . . . .	65
§ 2.4.	Основные параметры пьезокерамического резонатора . . . . .	72
§ 2.5.	Эффективный (динамический) коэффициент электромеханической связи пьезокерамического резонатора . . . . .	78
<b>Глава 3.</b>	<b>Методы определения констант пьезокерамических материалов и параметров пьезокерамических резонаторов . . . . .</b>	<b>82</b>
§ 3.1.	Классификация методов . . . . .	82
§ 3.2.	Метод резонанса — антирезонанса (Р—А) . . . . .	83
§ 3.3.	Обертоновый метод . . . . .	106
§ 3.4.	Метод переменной электрической нагрузки . . . . .	110
§ 3.5.	Метод круговых диаграмм . . . . .	115
§ 3.6.	Метод коэффициента усиления ширины полосы частот . . . . .	118
§ 3.7.	Метод решения систем комплексной проводимости . . . . .	123
§ 3.8.	Метод минимума дисперсии . . . . .	133
§ 3.9.	Ультразвуковой динамический метод . . . . .	134
<b>Глава 4.</b>	<b>Приборы и устройства для измерения электрофизических параметров пьезокерамических преобразователей . . . . .</b>	<b>138</b>
§ 4.1.	Основные требования к приборам и устройствам . . . . .	138
§ 4.2.	Автогенераторные измерения . . . . .	139
§ 4.3.	Амплитудные измерения . . . . .	141

§ 4.4.	Амплитудно-фазовые измерения . . . . .	144
§ 4.5.	Измерение частотных характеристик комплексного сопро- тивления . . . . .	146
<b>Глава 5.</b>	<b>Основные параметры и характеристики пьезокерамических преобразователей типа стержней, пластин, цилиндров произ- вольной структуры . . . . .</b>	<b>150</b>
§ 5.1.	Типы преобразователей . . . . .	150
§ 5.2.	Режимы работы . . . . .	151
§ 5.3.	Особенности практической реализации преобразователей раз- личного назначения и построение соответствующей физиче- ской модели . . . . .	152
§ 5.4.	Преобразователь типа тонкого стержня (пластины) с про- дольной поляризацией . . . . .	154
§ 5.5.	Преобразователь типа протяженного (короткого) цилиндра	162
<b>Глава 6.</b>	<b>Методы построения и анализа широкополосных пьезокерами- ческих преобразователей . . . . .</b>	<b>170</b>
§ 6.1.	Постановка задачи. Сравнительные энергетические оценки	170
§ 6.2.	Тракт излучения с электрической коррекцией . . . . .	172
§ 6.3.	Согласующие акустические системы . . . . .	174
§ 6.4.	Преобразователи с распределенным по длине возбуждением	177
§ 6.5.	Комплексирование методов и задача многопараметровой оптимизации . . . . .	180
<b>Глава 7.</b>	<b>Методы построения пьезокерамических преобразователей с управляемыми параметрами и характеристиками . . . . .</b>	<b>183</b>
§ 7.1.	Многорезонансный преобразователь, работающий на множе- стве четных и нечетных гармоник . . . . .	183
§ 7.2.	Многорезонансный преобразователь, работающий на произ- вольной совокупности резонансных частот . . . . .	184
§ 7.3.	Преобразователь с перестраиваемой рабочей частотой . . . . .	189
§ 7.4.	Преобразователь с перестраиваемой рабочей полосой частот	190
§ 7.5.	Многофункциональные перестраиваемые преобразователи	191
<b>Глава 8.</b>	<b>Методы расчета пьезокерамических преобразователей произ- вольной геометрии . . . . .</b>	<b>196</b>
§ 8.1.	Аппроксимация зависимости основной резонансной частоты преобразователя типа стержня (пластины) от его геомет- рических размеров . . . . .	196
§ 8.2.	Аппроксимация зависимости основной резонансной частоты преобразователя типа цилиндра (шайбы) от его геометриче- ских размеров . . . . .	200
§ 8.3.	Полное описание работы преобразователя произвольных размеров в окрестности основной резонансной частоты . . . . .	202
<b>Глава 9.</b>	<b>Определение параметров пьезокерамических преобразовате- лей посредством визуализации создаваемых ими акустических полей . . . . .</b>	<b>211</b>
§ 9.1.	Физические основы методов визуализации акустических и тепловых полей пьезоэлементов . . . . .	211
§ 9.2.	Акустические поля пьезокерамических преобразователей . . . . .	226
§ 9.3.	Устройства для визуализации ультразвуковых и тепловых полей ПКЭ . . . . .	231
<b>Указатель литературы . . . . .</b>		<b>249</b>